

LEÇONS

SUR

LA VISCOSITÉ

DES LIQUIDES ET DES GAZ.

LEÇONS

SUR

LA VISCOSITÉ

DES LIQUIDES ET DES GAZ.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
38841 Quai des Grands-Augustins, 55.

LEÇONS

SUR

LA VISCOSITÉ

DES LIQUIDES ET DES GAZ

PAR

Marcel BRILLOUIN,
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE.

SECONDE PARTIE.

VISCOSITÉ DES GAZ.
CARACTÈRES GÉNÉRAUX DES THÉORIES MOLÉCULAIRES.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1907

LEÇONS

SUR

LA VISCOSITÉ

DES LIQUIDES ET DES GAZ.

LIVRE III.

GAZ.

CHAPITRE I.

PREMIÈRES RECHERCHES SUR LA VISCOSITÉ DES GAZ, AU MOYEN DU PENDULE ET DES DISQUES OSCILLANTS.

---

185. **La résistance de l'air et le pendule.** — La viscosité des gaz a été peu étudiée et seulement d'une manière indirecte et accessoire jusqu'en 1865. Considérée comme négligeable sauf dans les expériences de haute précision sur le pendule, elle était délaissée des physiciens; seuls les géodésiens s'en occupaient, et au point de vue le moins instructif et le moins fécond, comme d'une correction. On trouvera la longue histoire de leurs patientes mesures dans l'Introduction que M. Wolf a mise aux deux Volumes sur le pendule, publiés par la Société de Physique. Il serait à peine nécessaire de les mentionner ici, si l'un de ces Mémoires, rempli de mesures sur les *périodes* (mais non sur les pertes d'amplitude) de

pendules de formes diverses, exécutées par le soigneux et laborieux Baily, n'avait fourni à Stokes l'occasion d'écrire un très beau et très important travail, portant à la fois sur les principes de la théorie de la viscosité des fluides, leur application au mouvement des pendules, et la discussion détaillée des résultats de Baily. Les difficultés analytiques, que Stokes avait réussi à surmonter, étaient plutôt faites pour décourager les autres chercheurs; car rien ne paraissait, dans cette recherche, dépasser la portée d'un perfectionnement de métrologie.

186. Débuts de la théorie cinétique des gaz. — En 1860, l'aspect de la question changea complètement. Clausius avait publié, en 1857, son Mémoire *Sur la nature du mouvement auquel nous donnons le nom de chaleur*, dans lequel il retrouvait indépendamment, en leur donnant plus de précision, les résultats obtenus un siècle auparavant par Daniel Bernoulli (¹), et rappelés par Lesage et Prévot (²), Williamson (³), Herapath (⁴), et plus récemment par Joule (⁵), Krönig (⁶).

Dans cette hypothèse, la pression des gaz est tout entière d'origine cinétique, d'où résulte que la vitesse des molécules est, à la température de la glace fondante, égale à 461^m par seconde pour l'oxygène, celle des molécules d'hydrogène à 1844^m par seconde. La loi de Mariotte en résulte, et la loi de Gay-Lussac, pourvu qu'on admette que tous les gaz contiennent le même nombre de molécules par unité de volume, sous la même pression et à la même température.

Mais comment admettre que les molécules se meuvent avec de pareilles vitesses en ligne droite? N'en devait-il pas résulter un mélange extraordinairement rapide des masses gazeuses contiguës, contrairement à ce qu'on observe? C'est ce que Buys-Ballot faisait remarquer dès le début de 1858 (⁷). Qui n'a observé la persistance des traînées de fumée de tabac, la lenteur de leur mouvement dans

---

(¹) D. Bernoulli, *Hydrodynamica*, 1738. — D. et J. Bernoulli, *Nouveaux principes ...*, 1746. — *Recueil des pièces de prix de l'Académie*, t. V, 1752.

(²) Le Sage, *Essay de Chimie méchanique*, couronné en 1758 par l'Académie de Rouen.

(³) Prévot, *De l'origine des forces magnétiques*, 1788.

(⁴) Prévot et Le Sage, *Deux traités de Physique*, 1818.

(⁵) Joule, *Mém. of the Manchester Society*, t. IX, 1851. — *Phil. Mag.* t. XIV, 1857.

(⁶) Krönig, *Pogg. Ann.*, t. XCIX, 1856, p. 315.

(⁷) *Pogg. Ann.*, t. CIII, p. 240.

une chambre close? Lorsqu'on débouche un flacon d'ammoniaque, ou d'un liquide odorant, chacun sait que plusieurs minutes s'écoulent avant que l'odeur soit sensible à quelques mètres de distance seulement, tandis que les particules gazeuses auraient dû parcourir la chambre des centaines de fois en une seule seconde. Comment peut-on verser de l'acide carbonique gazeux d'une éprouvette dans une autre?

« Comme ces objections peuvent paraître très fortes, au premier abord, il me semble nécessaire, dit Clausius quelques mois plus tard ([1]), de démontrer d'une manière spéciale que les faits invoqués peuvent très bien s'accorder avec la théorie du mouvement rectiligne des molécules. Les objections de M. Buys-Ballot me sont même d'autant plus agréables qu'elles me fournissent l'occasion de compléter cette partie de la théorie, que j'ai peut-être traitée un peu brièvement dans mon précédent Mémoire, et d'éviter par là d'autres malentendus pour l'avenir. »

187. Chemin moyen et dimensions moléculaires. — Déjà en effet, dans son précédent Mémoire, Clausius avait bien décrit explicitement les mouvements moléculaires, et les chocs des molécules les unes contre les autres, et avait fait allusion à l'explication qu'on en peut déduire pour les écarts de la loi de Mariotte. Sans qu'il le sût, il avait été précédé dans cette voie par Bernoulli, qui avait annoncé ces écarts et en avait formulé une loi approchée. Dans ce nouveau Mémoire, Clausius entreprend de donner une idée de la grandeur moyenne des chemins parcourus par les molécules. Il explique clairement ce qu'il entend par sphère d'action moléculaire et justifie la simplification qu'il adoptera dans la suite en substituant à titre approximatif dans les gaz de faible densité la notion du choc à distance définie, à celle de rencontre et d'action mutuelle dans un domaine d'une certaine étendue. A chaque molécule appartient un domaine impénétrable aux autres molécules, c'est le volume d'une molécule; le rayon de la sphère de même volume est le rayon de la molécule.

Il suffit que chaque molécule ait un rayon fini, même très petit, pour que le chemin rectiligne d'un point à un autre soit obstrué, dès que la distance des deux points dépasse un assez petit nombre de distances moléculaires, comme le regard est arrêté dans une forêt

---

([1]) *Pogg. Ann.*, t. CV, 1858, p. 239.

par des troncs d'arbres, même très espacés. La distance moyenne de portée de la vue est l'analogue de la longueur moyenne de libre parcours d'une molécule au milieu des autres. Il n'y a aucune difficulté à calculer l'ordre de grandeur de ce libre parcours en fonction du nombre de molécules par unité de volume et de leur rayon moyen. On a d'ailleurs une idée du produit de ce nombre de molécules par le cube du rayon, en comparant le volume d'un corps à l'état gazeux à son volume à l'état liquide. Le chemin moyen n'atteint pas 100 fois la distance de deux molécules, et reste de l'ordre du dix-millième de millimètre à la pression et à la température normales.

Appliquant ces indications aux phénomènes de diffusion, la lenteur de ceux-ci n'a plus rien qui doive étonner. Les milliers de chocs que subit chaque molécule sur un parcours d'un millimètre ont changé autant de fois la direction de son mouvement; ce millimètre, parcouru en $\frac{1}{500}$ de seconde environ par chaque molécule d'oxygène, est une ligne brisée à plusieurs milliers de zigzags, dont la projection sur une direction déterminée peut être prodigieusement plus petite que sa longueur totale.

188. Relations entre les diverses diffusions. — L'objection avait trouvé sa réponse dans une description plus développée des phénomènes internes imaginés par Clausius et ses prédécesseurs, mais sans y ajouter rien de nouveau pour les besoins de la cause; le contenu de l'hypothèse se trouvait naturellement plus riche qu'on ne l'avait aperçu au premier coup d'œil.

Restait à tirer de cette conception ingénieuse de Clausius toutes ses conséquences quantitatives; suivre une molécule dans ses allées et venues, et trouver la très petite erreur de fermeture du polygone irrégulier qu'elle a décrit en quelques millièmes de seconde, il n'y fallait point songer. C'est seulement sur la progression moyenne d'un très nombreux groupe de molécules analogues que peut porter l'observation; c'est cette progression moyenne qu'il fallait calculer. Suivant la voie ouverte par Clausius, Maxwell publia en 1861 (¹) un assez court Mémoire, sobre de développements, et même un peu sec, découpé en courts théorèmes ou problèmes, traités les uns exactement, les autres par divination, dans lequel les trois diffusions principales sont rattachées à la même notion essentielle, celle du chemin moyen. De ces trois diffusions, diffusion de chaleur (ou conductibilité),

(¹) *Phil. Mag.*, 4ᵉ série, t. XIX, 1860, p. 20.

diffusion de matière, et diffusion de mouvement (ou viscosité), la plus simple est la dernière, car elle se fait dans une matière homogène, de température uniforme, et peut même ne pas mettre en jeu d'inégalités de pression.

Au cours de ce Mémoire, Maxwell avait d'ailleurs, sinon démontré, au moins rendu tout à fait vraisemblable que l'équilibre de température entre deux gaz exige que la force vive d'*une* molécule soit fonction de la seule température, indépendante de la nature chimique de la molécule; comme conséquence, le nombre de molécules par unité de volume de tous les gaz parfaits doit être le même, sous même pression et même température; l'hypothèse d'Avogadro et d'Ampère est une conséquence de la théorie cinétique des gaz.

Cela étant, le chemin moyen définit, à un même facteur près pour tous les gaz, la grosseur d'une molécule de chacun d'eux. Une quelconque des diffusions dont Maxwell venait d'ébaucher la théorie, suffisant à déterminer la seule donnée nouvelle, le chemin moyen, permettait de calculer les deux autres diffusions, et la comparaison de ces valeurs calculées, avec celles tirées de l'expérience, devait fournir un double contrôle de l'exactitude des vues sur lesquelles la théorie était fondée. De là un regain d'intérêt pour l'étude expérimentale assez difficile de ces diverses diffusions.

189. Influence de la densité et de la température. — Passons sur les critiques de détail que Clausius ([1]) eut à faire au premier calcul de Maxwell au sujet de la conductibilité thermique des gaz; l'un des résultats de Maxwell était particulièrement étonnant : ni la viscosité, ni la conductibilité ne devaient diminuer ou augmenter par la diminution ou l'augmentation de la densité à température constante; et cette conclusion était confirmée par Clausius. Un peu plus tard Stefan ([2]) montrait que la viscosité doit croître avec la température, contrairement à ce qui arrive pour les liquides, et Clausius aboutissait à la même conclusion pour la conductibilité.

Ces conséquences de la théorie ne laissaient pas d'être inquiétantes. Elles furent généralisées, sans cesser d'être imprévues, par Maxwell, quelques années plus tard (1865), dans un Mémoire où il a donné la seule forme rigoureuse de raisonnement applicable à ces diverses diffusions, quelle que soit d'ailleurs la loi d'action moléculaire, et a

([1]) *Pogg. Ann.*, t. CXV, 1862.
([2]) *Sitz. Wien. Akad.*, t. XLVI, 1862, p. 12.

poussé la théorie jusqu'aux nombres dans les deux cas particuliers du choc et de la répulsion en raison inverse de la cinquième puissance de la distance. Dans ce dernier cas, la notion de chemin moyen, quoique facile encore à définir, cesse d'être un intermédiaire utile ou même seulement commode pour le calcul; mais non pour le langage. Toutes les diffusions dépendent plus de la température, avec la répulsion qu'avec le choc, la puissance de la température absolue est augmentée de $\frac{1}{2}$ en passant du choc à la répulsion en r^{-5}; ce qu'on peut traduire ainsi : le chemin moyen est indépendant de la température à densité constante dans le cas du choc; il augmente comme la racine carrée de la température pour des molécules qui se repoussent suivant la cinquième puissance de la distance.

La distance minimum de deux molécules impénétrables est entièrement déterminée par leur nature; mais, si les molécules exercent une action à distance, leur distance minimum dépend de leur force vive moyenne. Quelque compliquée que puisse être cette relation entre la force vive moyenne et la distance minimum, c'est d'elle que les diverses diffusions dépendent; la détermination de la loi des diverses diffusions en fonction de la température absolue, équivaut à la définition de la loi d'action mutuelle de deux molécules en fonction de leur distance. C'était atteindre, par une voie un peu détournée, une donnée fondamentale de physique moléculaire, qui avait paru longtemps insaisissable.

Les mesures de viscosité se multiplièrent; après maintes difficultés techniques enfin surmontées, la concordance des résultats permit la discussion, et le progrès se trouva moindre qu'on ne l'avait espéré, mais conforme à l'ensemble de nos vues en Physique moléculaire. Si la loi d'action mutuelle avait pu se représenter par une seule puissance négative de la distance, l'influence de la température se serait traduite par une puissance déterminée de la température absolue, comme l'a montré M. Meyer après le Mémoire de Maxwell sur les molécules qui se repoussent en raison inverse de la cinquième puissance de la distance.

Ce n'est pas ce que l'expérience donnait. La formule qui résume les expériences a été découverte par M. Sutherland; et les recherches plus récentes l'ont confirmée à l'exclusion de toute autre jusqu'à présent. Son interprétation théorique est très simple; la section apparente d'une molécule est une fonction linéaire décroissante de l'inverse de la température absolue; et cette notion dérive immédiatement de l'hypothèse que la molécule exerce une attraction lente-

ment variable au delà d'un domaine impénétrable défini, du moins pour des forces de l'intensité de celles que les mouvements moléculaires mettent en jeu. C'est bien l'hypothèse constamment invoquée par les fondateurs de la Physique mathématique, et immédiatement fournie par la simple comparaison des propriétés des solides et des fluides. Actuellement, ni l'expérience ni la théorie ne vont plus loin; la loi d'attraction pourvu qu'elle soit assez lente reste indéterminée; la loi de répulsion, dont l'impénétrabilité n'est qu'une forme limite certainement trop grossière, est également hors de notre atteinte; il suffit de la supposer très rapidement variable, comme la faible compressibilité des cristaux nous y contraint d'ailleurs.

D'autres voies semblent s'ouvrir pour pénétrer plus avant dans la connaissance de la molécule et de ses constituants, atomes et sous-atomes, matière et électrons. Les recherches sur la viscosité se font plus rares. Un exposé d'ensemble, et coordonné, devient possible; il est bon de marquer l'étape parcourue, et d'examiner ce qu'on peut gagner encore. Mais il faut d'abord exposer les résultats positifs fournis par l'expérience, et définitivement acquis, en quelque sens et dans quelque mesure que doivent être modifiées dans l'avenir les vues théoriques qui ont suscité la curiosité et entretenu l'ardeur des chercheurs.

190. Premières expériences de O.-E. Meyer. — Quelques années avant ce grand mouvement de recherches théoriques, O.-E. Meyer avait entrepris des expériences sur la viscosité des liquides, sous la direction de Neumann, et obtenu, en 1858, le prix proposé l'année précédente par la Faculté de Physiologie de Königsberg : *Étude de la viscosité des fluides par l'amortissement d'un cylindre oscillant autour de son axe*. Meyer avait employé non le cylindre mais le disque, d'après l'arrangement de Coulomb, pour avoir un amortissement plus grand, grâce au moindre moment d'inertie; mais il avait éprouvé de grandes difficultés pour déterminer le moment d'inertie de ses disques au moyen de poids portés par une règle, d'après la méthode de Gauss, obtenant des écarts de $\frac{1}{10}$. Après de nombreux essais, il soupçonna que la résistance de l'air sur ces poids additionnels pouvait être l'origine des écarts, et fut ainsi amené à étudier la viscosité de l'air, après avoir réduit les écarts à moins de $\frac{1}{200}$ par la substitution d'anneaux de révolution, préconisés par Neumann, aux deux poids de Gauss. Son Mémoire parut seule-

ment en 1861 ([1]). Les décréments logarithmiques $\left(\lambda = \log_e \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right)$ et les périodes T dans l'air et dans l'eau satisfont bien à la condition théorique

$$\frac{T_{eau} - T_{air}}{T_{air}} = \frac{\lambda_{eau} - \lambda_{air}}{\pi},$$

pour chacun des quatre disques employés; mais l'insuffisance de la première théorie de Meyer ([2]) ne permit pas d'obtenir un bon accord entre les viscosités fournies par les différents disques. Ces premières expériences conduisirent aux valeurs suivantes de la viscosité (C.G.S.):

Air.	Eau.	Laiton (du fil de torsion).
0,000 36	0,0131	3.10^8

vers 18°. D'ailleurs, avec un même disque à la même température, on trouvait des nombres variant de 0,000 28 à 0,000 48 pour la viscosité de l'air, corrigée de celle du fil de torsion.

La valeur trouvée pour l'eau était encore de $\frac{1}{3}$ plus grande que celle de Poiseuille, mais meilleure que celle d'Helmholtz et de Piotrowsky 0,014, et surtout que celle de Coulomb 0,02 (18°).

Ces désaccords rendaient nécessaire une modification de l'appareil permettant d'éliminer rigoureusement la viscosité du fil de suspension; c'est ce que Meyer chercha à réaliser par l'ingénieuse combinaison de trois disques identiques, suspendus au même axe, tantôt à quelques centimètres de distance les uns au-dessous des autres, tantôt en contact, ce qui modifie uniquement le frottement de l'air sur l'appareil oscillant. Ces expériences furent publiées en 1865 ([3]), dans la dernière Partie d'un Mémoire consacré uniquement à la viscosité de l'air. Une discussion fort intéressante de ce qu'on peut tirer des observations des géodésiens sur le pendule occupe la première moitié de ce Mémoire.

191. Expériences de Bessel. — Bessel avait étudié dans son grand Mémoire de 1826 ([4]) la correction d'inertie additionnelle (différente de la correction de poussée) due à l'air, définie comme égale à k fois

([1]) *Pogg. Ann.*, t. CXIII, p. 55, 193, 383.
([2]) *Journal de Crelle*, t. 59, *voir* Livre I, n°s 95-101.
([3]) *Pogg. Ann.*, t. CXXV, p. 175, 401, 384.
([4]) *Abh. Berl. Akad.*, 1828.

la masse d'air déplacée. Pour cela, il employait quatre pendules formés au moyen de deux sphères de même rayon, mais de masses différentes, suspendues à deux fils de longueur différente. On a alors, en appelant T_0 la période dans le vide, T la période dans l'air, M la masse du pendule, m celle de l'air qu'il déplace,

$$\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{M + km}{M - m},$$

si l'amortissement est très petit.

Par suite de l'entraînement de l'air dû aux déplacements de la sphère, indépendamment de toute viscosité, k serait égal à $\frac{1}{2}$ (1) et le mouvement ne serait pas amorti. Or le mouvement du pendule s'éteint, et la valeur de k tirée de la comparaison de deux pendules de même longueur, de même rayon (même T, même m), mais de masses différentes M, est toujours plus grande que $\frac{1}{2}$. Ceci est d'accord avec les résultats de Stokes (2) comme nous l'avons vu plus haut (n° 73) (3), l'entraînement par déplacement et viscosité produit une réaction qui se compose d'une résistance proportionnelle à la vitesse, et d'un accroissement d'inertie.

Les expériences de Bessel donnent dans l'air $k = 0{,}946$ à $0{,}957$ et dans l'eau $k = 0{,}648$ pour le pendule long ($T = 2 \times 1^s{,}72$); et pour le pendule court 0,755 dans l'air et 0,602 ($T = 2 \times 1^s$). De ces valeurs Meyer tire, au moyen des formules de Stokes,

$$k = \frac{T_2^2\left(\frac{1}{2} + \frac{9}{4R}\sqrt{\frac{\mu T_2}{\pi\rho}}\right) - T_1^2\left(\frac{1}{2} + \frac{9}{4R}\sqrt{\frac{\mu T_1}{\pi\rho}}\right)}{T_2^2 - T_1^2},$$

une valeur de μ pour une température d'environ 12°, égale à 0,000275.

Les expériences de Baily, discutées par Stokes, en supposant la viscosité proportionnelle à la pression, conduisent à $\mu = 0{,}000104$, lorsqu'on abandonne cette hypothèse inexacte, et qu'on admet, conformément aux indications de la théorie cinétique, que la viscosité est

---

(1) Poisson, *Mém. Acad. Paris*, t. XI, 1832, p. 521. — Clebsch, *J. Crelle*, t. 52, 1856, p. 119 (amplitude finie).

(2) *Cambr. Phil. Tr.*, t. IX, p. 32.

(3) *Errata.* — N° 72. Le facteur ($2\cos^2\zeta - 1$) *doit être remplacé par* $3(\cos^2\zeta - 1)$. Dans $\mathfrak{R}$: ($4 - 4\beta R + \beta^2 R^2$) *à remplacer par* ($9 - 9\beta R + \beta^2 R^2$).

N° 73. — Dans les parenthèses des $\mathfrak{R}$ de tout ce numéro *il faut remplacer* 4 et $4\beta R$ *par* 9 et $9\beta R$ sans changer R^2.

De même dans la dernière équation de la page 85.

indépendante de la pression, comme Meyer l'a montré par les expériences décrites dans ce même Mémoire.

L'écart entre ces deux valeurs est énorme; peut-être tient-il à la petitesse de l'influence de la viscosité sur la période, et à l'incertitude qui subsiste sur la différence des périodes dans les diverses circonstances.

192. Expériences de Girault. — L'observation de la perte d'amplitude, beaucoup plus facile, et directement soumise à l'influence de la viscosité, pourrait donner des résultats beaucoup plus précis; mais ces observations ont été très rares. Meyer ne découvrit qu'une série d'observations contenant les données nécessaires pour le calcul, celles de Girault de Caen, effectuées en 1860 (1) sur une sphère en bois de 1^{dm} de diamètre, pesant 342^g, suspendue par quatre fils à une planchette munie de deux pointes formant couteau. Entre $4''7'$ et $0''55'$, la perte d'amplitude $\delta\alpha$ d'une oscillation à la suivante est représentée par

$$\delta\alpha = 0{,}000\,707\,\alpha\left(1 + \frac{\alpha}{0{,}061}\right),$$

le décrément logarithmique λ est donc 0,000 707.

Par application de la formule de Stokes

$$\lambda = \frac{\pi}{2}\frac{9}{4R}\sqrt{\frac{2\mu T}{\pi\rho}}\,\frac{1 + \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2\mu T}{\pi\rho}}}{M + \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{4R}\sqrt{\frac{2\mu T}{\pi\rho}}\right)m}\,m.$$

Meyer en déduit la valeur, encore plus grande que celle de Bessel,

$$\mu = 0.000\,385.$$

Ces nombres, compris entre les mêmes limites que ceux obtenus au moyen des disques, différaient encore trop; Meyer se décida à étudier lui-même l'amortissement du pendule à boule sphérique.

193. Expériences de Meyer au moyen du pendule. — Il installa ses expériences dans la cage du grand escalier de l'Institut de Physique de Breslau, au milieu de l'espace vide semicirculaire de 3^m de diamètre (2); trois longueurs de pendule furent obtenues, $14^m,55$,

(1) *Mém. Acad. Caen*, 1860.

(2) *Ann. Pogg.*, t. CXLII, p. 481.

$9^m,49$, $4^m,48$, en fixant le support du fil au troisième, au deuxième et au premier étage. La boule de bois a 21^{cm} de diamètre, elle pèse 2471^g; le fil de cuivre qui la supporte a $0^{mm},34$ de diamètre et pèse $0^g,841$ par mètre. Les amplitudes sont observées à distance au moyen d'une lunette astronomique à micromètre oculaire installée dans le vestibule. Les observations, exécutées avec le plus grand soin, ont donné accessoirement au moyen des périodes, en employant la viscosité tirée des observations d'amortissement :

$k = 0,637$ .... pour le plus long pendule
$k = 0,623$ .... pour le pendule moyen
$k = 0,603$ .... pour le pendule court

Aux amplitudes employées, la perte d'amplitude par oscillation contient un terme proportionnel au carré de l'amplitude

$$\delta\alpha = \lambda\alpha(1 + \beta\alpha);$$

l'ensemble des observations permet d'obtenir le décrément limite pour les oscillations infiniment petites :

0,000 578 .... pendule long
0,000 515 .... pendule moyen
0,000 375 .... pendule court

De ces décréments et des périodes correspondantes on tire, par la formule de Stokes (en C.G.S.),

$\mu = 0,000\,232$ .... pendule long
$\mu = 0,000\,233$ .... pendule moyen
$\mu = 0,000\,184$ .... pendule court

« dont la valeur moyenne 0,000 216 est en bon accord avec les mesures de Maxwell et celles (inédites) que j'ai effectuées par la méthode de Maxwell ». La formule de Maxwell donne $\mu = 0,000\,200$, qui représente bien les observations, en tenant compte du deuxième terme en β, avec $\beta = 0,0036\frac{T}{2}$, comme il convient pour une résistance proportionnelle au carré de la vitesse, d'origine purement hydrodynamique.

194. Expériences de Meyer avec les disques. — Revenons aux expériences effectuées au moyen des disques et publiées par O.-E. Meyer en 1865.

Trois disques égaux sont traversés en leur centre par une tige

rigide à laquelle le disque intermédiaire est invariablement fixé. Les deux autres disques peuvent glisser le long de cette tige; on les fixe d'abord à des distances égales, à l'aide de vis de pression.

Le système est suspendu par un bifilaire et placé dans une cloche à parois résistantes, où l'on peut faire le vide.

On imprime au système une certaine torsion et on l'abandonne. Les disques oscillent autour d'un axe vertical, chacun d'eux restant à peu près dans son plan. Un miroir permet d'observer les oscillations par réflexion.

Les oscillations s'amortissent peu à peu; cet amortissement est dû :

1° Au frottement de l'air, dû à l'oscillation de chaque disque dans son plan;

2° Au frottement de l'air, dû à la tige de suspension, au miroir, etc. ;

3° A la viscosité des fils de suspension.

Il faut éliminer ces deux dernières influences.

Pour cela, Meyer fait deux expériences. Dans la première, il fait osciller le système, les trois disques étant à une certaine distance l'un de l'autre; il mesure l'amortissement dans ce cas. Dans la deuxième, il mesure l'amortissement en faisant osciller le système après avoir appliqué les deux disques extrêmes contre celui du milieu.

La différence est supposée égale au double de la résistance due à un seul disque; les résistances parasites sont éliminées.

195. Discussion. — Cette méthode d'élimination des viscosités parasites est ingénieuse; malheureusement, elle n'est exacte que sous certaines conditions que n'a pas vues M. Meyer, mais que Maxwell a indiquées plus tard. Pour que chaque disque intervienne comme s'il était seul, il faut que l'entraînement de l'air par les disques ne s'étende pas d'une manière appréciable jusqu'au milieu de la distance qui les sépare; alors seulement chaque disque se meut comme s'il était seul dans un gaz indéfiniment étendu en repos à très grande distance. Une condition évidente est que la période soit assez courte, car un mouvement très lent entraîne l'air à toute distance; mais il faut, en outre, que le mouvement ne soit pas trop rapide, pour pouvoir négliger dans le calcul théorique tout ce qui dépend du carré de la vitesse et, en particulier, la force centrifuge.

En outre, pour tirer de ces expériences la valeur absolue de la viscosité, il faudrait connaître la théorie du mouvement du liquide ou du gaz entraîné par un disque qui oscille dans son plan, et calculer le couple exercé sur le disque.

Ce problème difficile n'a été, jusqu'à présent, résolu que d'une manière assez grossière. (*Voir* Liv. I, Chap. V, nos 81, 82, 83, 84 et nos 95 à 101.) Dans ses premiers Mémoires, M. Meyer avait admis que le mouvement s'effectue par plans parallèles, comme si le disque était indéfini; c'est la solution du no 96. Soit

φ_0 le déplacement initial,
λ le décrément logarithmique,
T la période.

On a

$$\frac{2\pi}{T} = \theta_2, \qquad \lambda = -\theta_1 \frac{T}{2},$$

$$\varepsilon^2 = \frac{2\rho}{\mu T}\sqrt{\pi^2+\lambda^2}, \qquad \operatorname{tang}(2\eta) = -\frac{\pi}{\lambda},$$

$$C = \varphi_0 \pi \frac{\mu^2\varepsilon^3}{\rho} \frac{R^4}{2} e^{-\frac{2\lambda}{T}t} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + 3\eta\right).$$

Les équations du no 99 donnent alors

$$\frac{\pi\mu^2\varepsilon^3}{\rho}\frac{R^4}{2}\cos 3\eta = -K\left(\frac{4\pi^2-\lambda^2}{T^2} - \frac{4\pi^2}{T_0^2}\right),$$

$$\frac{\pi\mu^2\varepsilon^3}{\rho}\frac{R^4}{2}\sin 3\eta = -2K\frac{4\pi\lambda}{T^2}.$$

Lorsque le décrément est faible, on tire de ces équations :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2\rho\pi}{\mu T}}, \qquad \eta = \frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2\pi};$$

ces valeurs conduisent aux deux formules

$$\sqrt{\mu\rho} = -\frac{K\sqrt{2}}{R^4}\frac{1}{\sqrt{\pi T}}\left(1 - \frac{T^2}{T_0^2}\right),$$

$$\sqrt{\mu\rho} = \frac{2K\sqrt{2}}{R^4}\frac{\lambda}{\pi\sqrt{\pi T}},$$

qui permettent de déterminer $\sqrt{\mu\rho}$ soit par l'observation des périodes, soit par celle de l'amortissement.

196. Résultats. — O.-E. Meyer a opéré avec quatre disques d'épaisseurs différentes, mais petites, et de diamètres variés :

	Laiton$_1$.	Verre.	Laiton$_2$.	Fer-blanc.
Rayon	$4^{cm},38$	$5^{cm},85$	$7^{cm},70$	$10^{cm},5$
Épaisseur	$1^{cm},36$	$2^{cm},90$	$1^{cm},27$	$0^{cm},05$

Les valeurs de $\sqrt{\mu\rho}$, tirées de la différence des périodes, sont d'environ $\frac{1}{10}$ plus petites que celles tirées de l'amortissement, sauf pour le plateau de verre où la différence, en sens inverse, atteint $\frac{1}{4}$. On conserve pour le calcul les valeurs déduites de l'amortissement, seul déterminé avec précision. Pour l'eau étudiée à titre de contrôle, les valeurs de $\mu\rho$ décroissent de $\frac{1}{17}$, en passant du petit au grand diamètre; et la viscosité obtenue (à $15^{\circ},5$), 0,0132 en C.G.S., est plus forte que celle de Poiseuille : 0,113.

Dans les expériences sur l'air, il est à remarquer que l'appareil atteint directement $\mu\rho$, et non μ; en conséquence, l'effet diminue très vite avec la densité, et le contrôle de l'invariabilité de μ, malgré les variations de densité, manque de sensibilité. De ses expériences M. Meyer a tiré la valeur 0,000353 (C.G.S.) (0°-760^{mm}) sensiblement double de la véritable; et encore le disque de verre conduirait-il à 0,000310, et le petit disque de laiton à 0,000495, bien qu'ils aient presque le même diamètre.

Un tel désaccord, que M. Meyer qualifiait alors de *concordance surprenante* ([1]), a pour double origine la difficulté même des expériences, et surtout l'inexactitude de la théorie d'un seul disque et de l'hypothèse de l'indépendance des trois disques. Sur ce dernier point, les nombres et la théorie même imparfaite de M. Meyer suffisent à nous renseigner.

Les périodes ont varié de 15 à 20 secondes dans l'air; acceptant $\sqrt{\mu\rho} = 0,0007$ environ et $\rho = 0,0013$, la décroissance d'amplitude en profondeur est donnée par

$$e^{-z\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}\sqrt{\frac{\pi}{T}}} = e^{-\frac{z}{1,3}} \text{ environ.}$$

Il faudrait une épaisseur de $4,6 \times 1,3$, soit 6^{cm}, pour que l'amplitude soit réduite au $\frac{1}{100}$; il faudrait donc que les disques fussent à 12^{cm} l'un de l'autre, ce qui était bien loin d'être atteint. Une partie de l'air était donc entraînée entre les disques, d'autant plus grande que la pression de l'air était moindre. Mais, en outre, il y a un facteur périodique en z, dont la longueur d'onde, de l'ordre de $2\pi \times 1,3 = 8^{cm},2$, double quand la pression est réduite au quart. Cette longueur d'onde était toujours plus grande que la distance des disques; à la pression atmosphérique, un disque était dans le domaine

---

([1]) *J. Crelle*, t. 59, p. 282.

de phase opposée de l'air entraîné par l'autre; la réaction d'un disque sur l'autre était probablement retardatrice; aux pressions moindres, la demi-longueur d'onde était plus grande et pouvait dépasser la distance des deux disques; leur action mutuelle, dans ce cas, pouvait être accélératrice. C'est ce qui paraît s'être produit dans les expériences suivantes :

	Pressions.	$10^{+6}\mu$.
	mm	
Disques à 3cm de distance l'un de l'autre...	250	204
	500	336
	750	313
Disques à 3cm,5........................	250	318
	500	385
	750	288

Au sujet de l'influence de l'épaisseur, une indication suffira. Dans ce même Mémoire théorique, M. Meyer admettait que, dans l'espace extérieur au disque entre les prolongements de ses deux faces planes, le mouvement est assimilable à celui qui environnerait un cylindre de même rayon et de hauteur infinie; calculant d'ailleurs ce dernier mouvement avec une approximation discutable, il concluait qu'on tient compte du bord en augmentant le rayon du disque de sa demi-épaisseur. Ici, la minceur du disque comparée à l'étendue de l'anneau fluide à entraîner rend manifestement absurde l'hypothèse adoptée.

197. Dernière série d'expériences de Meyer. — Dans un Mémoire presque contemporain (1866), Maxwell employa aussi les disques, mais dans des conditions beaucoup mieux définies dont il fit la théorie avec une suffisante exactitude. Il obtint ainsi pour la viscosité une valeur 0,000188 (C.G.S.) à 0°, très différente de celle de Meyer, mais en accord avec ce que l'on peut tirer des expériences de Graham sur l'écoulement des gaz par les tubes étroits [1]. Ayant reconnu la supériorité considérable de la méthode de Maxwell, due à l'intercalation de plaques immobiles entre les disques mobiles, Meyer reprit ses expériences avec cette modification [2], mais en conservant la suspension bifilaire qu'il regarde comme fournissant un couple plus constant, et surtout plus dépourvu de viscosité que le fil de torsion unique. La partie du décrément due

---

[1] MEYER, *Pogg. Ann.*, t. CXXVII, p. 365.
[2] *Pogg. Ann.*, t. CXLIII, 1871, p. 14.

aux viscosités parasites était encore 0,0003 environ sur un total compris entre 0,0010 et 0,0047 dans une première série, et entre 0,0025 et 0,0067 dans une seconde série d'expériences.

Calculées par les formules de Maxwell ces expériences ont donné les valeurs

$$\mu = 0{,}000197 \quad \text{(épaisseur d'air } 10^{mm} \text{ et } 5^{mm}\text{)},$$
$$\mu = 0{,}000190 \quad \text{(épaisseur d'air } 3^{mm},7\text{)},$$

qui concordent suffisamment avec celle de Maxwell, et avec celle que fournit le pendule. Désormais, il adopta 0,000200 comme valeur absolue à 18°, et publia un Tableau des viscosités de 18 gaz autres que l'air déduit des expériences de « transpiration » anciennes dues à Graham.

En 1887 enfin, le Mémoire de M. König (n° 97 ci-dessus) fournit à M. Meyer l'occasion de revenir sur la théorie du disque unique (n° 98) et de reprendre, au moyen de cette théorie suffisamment approchée, le calcul de ses anciennes expériences de 1863, publiées en 1865.

Les nombres calculés se groupent autour de la valeur 0,000200, au lieu de 0,000300 que donnait l'ancien mode de calcul. Dans une même série, les nombres varient encore beaucoup en fonction de la pression; il est difficile de décider si ces variations sont dues à ce que la paroi n'était pas infiniment éloignée, ou à ce que la mise en train des oscillations par rotation du haut de la suspension, toujours accompagnée d'oscillations pendulaires, produisait un mouvement du gaz bien plus compliqué que celui qu'on suppose, et variable d'une expérience à l'autre.

Le même mode de calcul appliqué aux anciennes expériences sur l'eau (1861) donne des nombres indépendants du diamètre du disque, compris entre 0,01146 et 0,01206, tandis que la valeur obtenue par Poiseuille à la même température est 0,01127. L'écart autrefois de $\frac{1}{5}$ est réduit au $\frac{1}{30}$ environ, encore par excès. Le nouveau mode de calcul est presque bon.

CHAPITRE II.

MAXWELL. — KUNDT ET WARBURG.

---

198. Appareil de Maxwell (1). — L'appareil de Maxwell diffère par un point important de celui que Meyer employait à la même époque; quatre disques fixes F, G, H, K, figure 1 de la planche, entre lesquels se meuvent les trois disques mobiles *f*, *g*, *h*, définissent exactement l'état de l'air autour des disques mobiles, et assurent l'indépendance de chacun d'eux. L'élimination des viscosités accessoires par une seconde expérience dans laquelle les trois disques mobiles accolés se meuvent entre deux disques fixes est alors tout à fait correcte. La mise en oscillation de rotation pure se fait en agissant du dehors sur le petit aimant *ns*, qui subit un couple pur.

L'appareil de chauffage (*fig.* 10) peut être installé au niveau QQ.

La figure 2 représente un disque fixe supporté comme l'indique la figure 6. La figure 3 représente un disque mobile.

Pour la détermination du moment d'inertie on a employé l'anneau centré (*fig.* 4) et le tube divisé (*fig.* 7) à l'intérieur duquel glissent des masses allongées.

Le mode d'attache du fil de torsion est représenté figure 5. Ce fil d'acier a 125^{cm} de longueur et $0^{mm},4$ de diamètre. Les disques de verre mobiles ont 27^{cm} de diamètre et $0^{cm},93$ d'épaisseur. Le poids total du système mobile est $1^{kg},36$, la période 36 secondes, le décrément 0,015 environ par demi-période.

Cinq montages ont été employés :

Les trois disques mobiles en contact :

		cm
1.	Épaisseur d'air entre les disques mobiles et les disques fixes.	2,54
2.	» » »	1,27

Les trois disques séparés.

3.	Épaisseur d'air	1,74
4.	»	1,08
5.	»	0,47

(1) *Phil. Trans.*, t. CLIV. — *Bakerian-Lecture*, 1866.

Fig. 66. — Reproduction de la Planche de Maxwell.

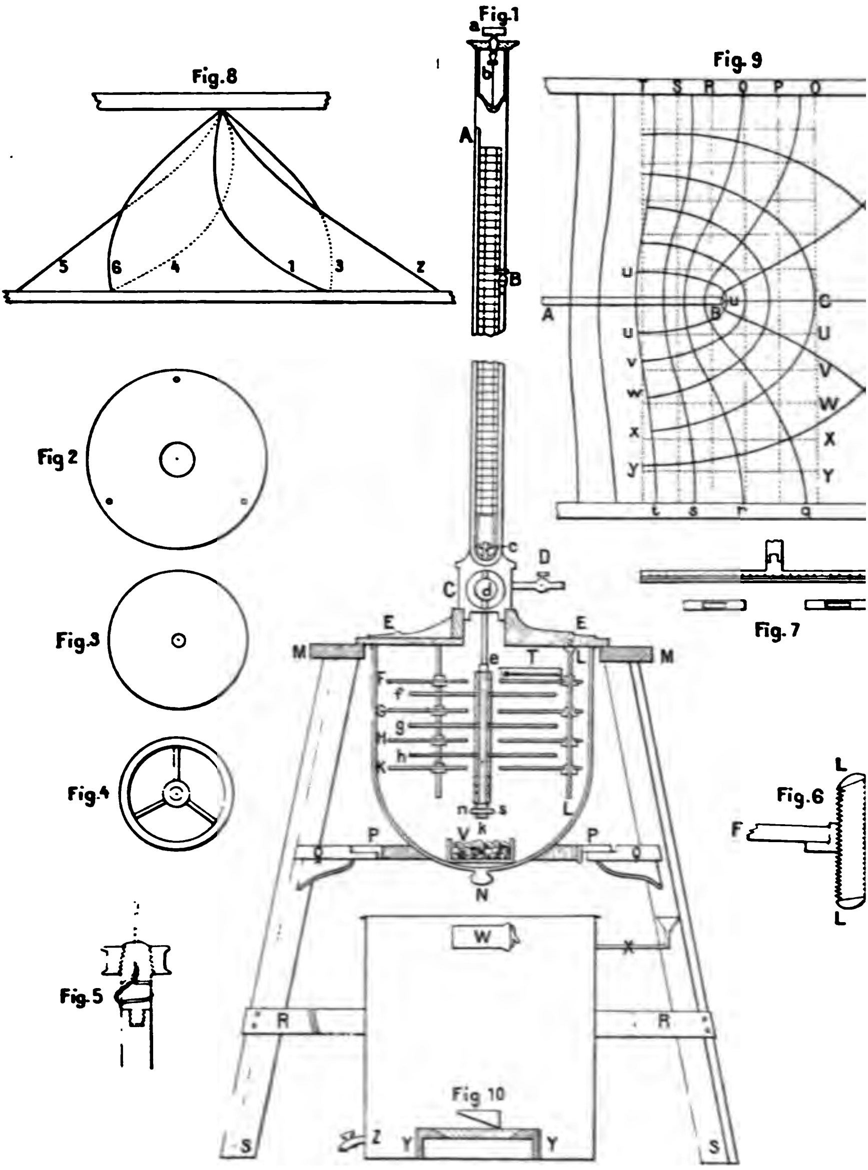


Fig. 1. — Ensemble de l'appareil.
Fig. 2-3. — Disques fixe et mobile.
Fig. 4. — Anneau pour la détermination du moment d'inertie.
Fig. 5. — Attache du fil de torsion.
Fig. 6. — Vis de réglage des disques fixes.
Fig. 7. — Tube divisé et masses pour la détermination du moment d'inertie.
Fig. 8. — Formes successives, pendant le mouvement rapide, d'une ligne fluide qui serai aux disques en repos.
Fig. 9. — Déformation des lignes d'égale vitesse et de leurs trajectoires orthogonales pr du disque.
Fig. 10. — Appareil de chauffage.

Ces petites épaisseurs et la longue durée d'oscillation ont été choisies par Maxwell de manière que la longueur d'onde de l'oscillation soit beaucoup plus grande que l'épaisseur d'air; la distribution des vitesses est alors à peu près linéaire et de même phase dans toute l'épaisseur de la couche d'air, au lieu d'être très variable avec la phase, comme le représente la figure 8, où le disque mobile est en bas.

199. Théorie. — Si l'épaisseur comprise entre le plan fixe et le disque mobile était réellement très petite par rapport à la longueur d'onde, l'état serait à chaque instant le même que dans le mouvement permanent, et l'on pourrait calculer le couple par les formules des n^{os} **82-83-84**, en tenant compte de l'influence des bords, suivant la méthode même employée par Maxwell dans ce Mémoire. C'est ce qui n'arrivait que pour la plus petite des distances employées par Maxwell sous la pression d'une atmosphère. Mais, dans la plupart de ses expériences, il n'en était pas ainsi. Pour la partie centrale du disque, Maxwell adopte la solution qui conviendrait pour un disque indéfini, celle du n° **96**, avec les deux exponentielles en z nécessaires lorsque la profondeur est limitée, et il l'étend jusqu'au rayon R du disque, avec la même correction de bord que si la rotation était uniforme. Les courbes d'égale vitesse angulaire et leurs trajectoires orthogonales sont dessinées dans la figure 9.

Lorsque le plan immobile est à la profondeur h, l'intégrale du n° **96** doit être remplacée par

$$\psi = \varphi_0 \frac{\mu\varepsilon^2}{2\rho} r^2 \frac{\mathrm{Sh}(\tau h - \tau z)}{\mathrm{Sh}(\tau h)} e^{\theta t + \left(2\eta - \frac{\pi}{2}\right) i}$$

qui conduit pour le couple à

$$C = -\varphi_0 \frac{\pi\mu^2\varepsilon^3}{\rho} \frac{R^4}{2} e^{\theta_1 t} \frac{\mathrm{Sh}(2\tau_1 h)\sin(\theta_2 t + 3\eta_1) - \sin(2\tau_2 h)\cos(\theta_2 t + 3\eta_1)}{\mathrm{Ch}(2\tau_1 h) - \cos(2\tau_2 h)}.$$

Lorsque h est petit, on peut développer par rapport à h, et ce développement fait apparaître un premier terme proportionnel μ indépendant de ρ, en tenant compte des relations entre ε, τ, θ, suivi de termes qui contiennent les puissances successives de $\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$, lorsqu'on conserve en évidence les quantités fournies par l'expérience θ_1 et θ_2.

Dans les expériences de Maxwell, il fut nécessaire de conserver quatre termes du développement pour avoir le millième dans les circonstances les plus défavorables.

Enfin, R' fut remplacé par $1 + 4\frac{L}{R}$ pour tenir compte du bord (n° 82).

200. Résultats. — Entre 1 atmosphère et $\frac{1}{60}$ d'atmosphère, à la température ordinaire, le décrément logarithmique ne change pas.

La viscosité est indépendante de la densité.

En chauffant à 185° Farenheit, au moyen d'un courant de vapeur autour de la cloche, Maxwell obtint une variation proportionnelle à la température absolue.

Ces expériences conduisent à prendre pour l'air

$$\mu = 0{,}0001878\left(1 + \frac{t}{273}\right) \qquad \text{C.G.S.}$$

Elles ne laissent aucun doute sur la rapidité de variation avec la température, plus grande que la racine carrée de la température absolue.

201. Expériences de Kundt et Warburg (¹). — Kundt et Warburg ont entrepris en 1874 des recherches sur la diffusion du mouvement et de la chaleur (viscosité et conductibilité), dans les gaz usuels, air hydrogène, anhydride carbonique, vapeur d'eau, sous de très faibles pressions. Leur but était de recueillir des données utiles pour le contrôle et le perfectionnement de la théorie cinétique, en particulier de comparer l'influence des dimensions des vases au chemin moyen que définit la théorie cinétique. Les développements théoriques et les calculs par lesquels débute leur Mémoire ne sont guère susceptibles d'être résumés; c'est par des considérations beaucoup plus simples que je vais d'abord montrer l'intérêt de ces recherches effectuées sous faible densité.

Les trois quantités, pression p, densité ρ et viscosité μ, qui caractérisent expérimentalement un gaz, ont les dimensions suivantes :

$$\begin{matrix} p & \rho & \mu \\ ML^{-1}T^{-2}, & ML^{-3}, & ML^{-1}T^{-1}. \end{matrix}$$

On sait déjà que $p : \rho$ définit le carré d'une vitesse, la vitesse du son de Newton, caractéristique du gaz et de sa température absolue. De même $\mu : \sqrt{p\rho}$ définit une longueur caractéristique du fluide dans son état actuel; cette longueur est proportionnelle au chemin moyen de la théorie cinétique. Or, l'expérience confirme que μ est

(¹) *Pogg. Ann.*, t. CLV, p. 337, 525, et t. CLVI, 1875, p. 177.

fonction de la température seule; la longueur $\mu : \sqrt{p\rho}$ est donc fonction de la température, et varie en raison inverse de la densité; elle croît autant qu'on veut, à condition d'abaisser la pression. Or à 0°, sous 1 atmosphère, dans l'air, avec $\mu = 0{,}00017$, on trouve une longueur l de $4{,}75\ 10^{-6}$ centimètres, qui deviendra $4{,}75\ 10^{-2}$ ou un demi-millimètre sous une pression de 10^{-4} atmosphères. Qu'arrive-t-il lorsque cette longueur devient comparable à l'épaisseur de la couche d'air comprise entre les parois fixe et mobile? Cette longueur est une unité naturelle pour l'épaisseur comprise entre les couches d'égale vitesse dans un gaz; on peut présumer que le développement complet de la viscosité à travers une surface exige la présence de deux couches de gaz d'épaisseur comparable à l de part et d'autre de la surface. Lorsqu'une partie de cette épaisseur fait défaut, la viscosité ne se développe qu'incomplètement; on peut donc présumer que l'épaisseur effective est égale à la distance des parois solides augmentée d'un certain multiple de l; ou encore qu'il se produit le long de la paroi un frottement de glissement dont le coefficient est proportionnel à $\frac{\mu}{l}$. Le frottement entre deux disques, indépendant de la densité tant que l'écart des disques est supérieur à 100 ou même à 10 fois l, doit finir par diminuer lorsque l'abaissement de la pression augmente suffisamment l; je dis *diminuer* parce que le frottement dû au gaz doit disparaître en même temps que le gaz; c'est cette considération qui fixe le sens de l'influence d'une épaisseur incomplète de gaz sur la viscosité.

Les expériences de Kundt et Warburg confirment ces vues et fixent des coefficients numériques peu différents de ceux que les auteurs ont tirés de la théorie cinétique au moyen d'approximations assez pénibles.

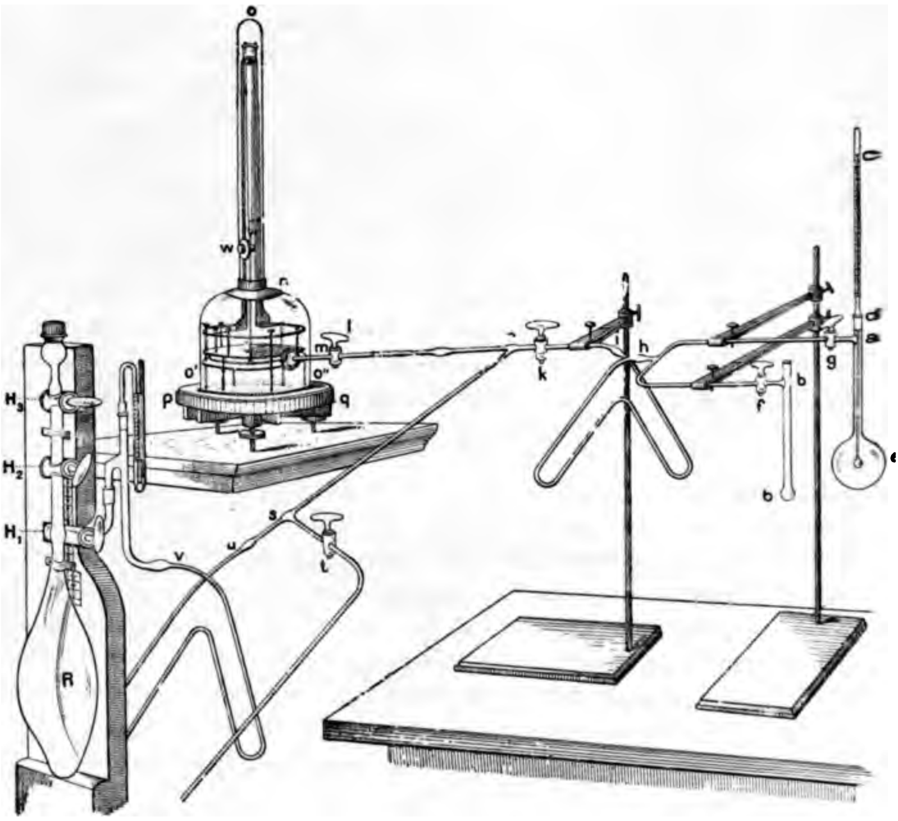
Le chemin moyen entre deux chocs est d'après la théorie cinétique sous sa forme la plus simple $l\sqrt{3}$, et, en tenant compte de la distribution des vitesses de Maxwell, $l : (0{,}3226\sqrt{3})$ un peu supérieur au précédent.

202. Appareil. — Un disque mobile unique oscille entre deux disques fixes très rapprochés; la durée d'oscillation est très considérable.

L'appareil (*fig.* 67) repose sur une plaque de verre encastrée dans un lourd support en fonte pq muni de trois vis calantes, lesquelles reposent elles-mêmes sur une solide console.

La carcasse de l'appareil est formée de deux anneaux de laiton α, δ, liés par trois colonnes verticales β, β', β'' (*fig.* 68). L'anneau supporte les deux montants y, y, au haut desquels est attaché le bifilaire.

Fig. 67.

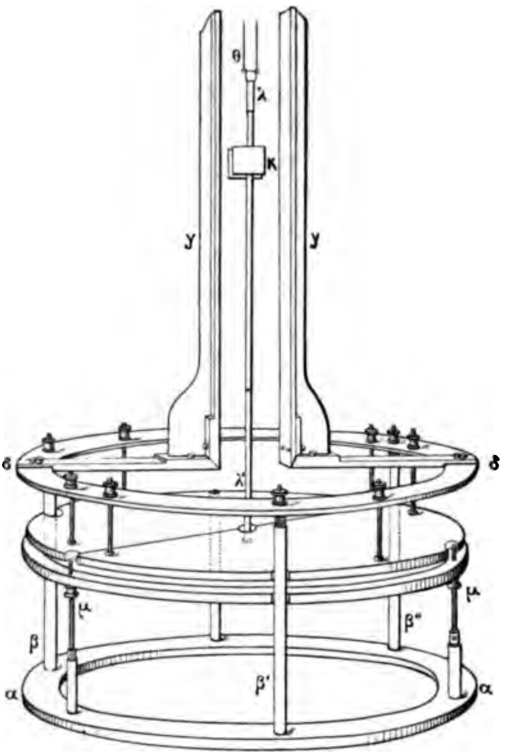


Le disque inférieur est un disque complet maintenu par trois écrous μ mobiles sur les tiges filetées qui le relient à l'anneau inférieur.

Le disque supérieur fixe est formé de deux moitiés accolées l'une contre l'autre le long d'un diamètre; chaque moitié est reliée à l'anneau supérieur par trois tiges filetées avec écrous; il porte sur son pourtour six encoches pour le passage des colonnes qui relient les deux anneaux et des tiges filetées correspondant au disque inférieur; son centre est percé d'un trou circulaire pour le passage de la tige de suspension du disque mobile.

Le disque mobile est fixé à l'extrémité d'une tige verticale λλ', laquelle est suspendue à l'extrémité d'un bifilaire. Au sommet de la tige est un miroir plan K pour observer les oscillations; au-dessus du miroir est fixée à la tige une petite aiguille de fer doux qui permet, à l'aide d'un aimant, de mettre le disque mobile en mouvement.

Fig. 68.



Le tout est entouré d'une cloche surmontée d'un manchon de verre, percé, devant le miroir K, d'une ouverture que ferme une lame de verre plane à faces parallèles.

La cloche est en communication par une série de tubes, coudés pour leur donner de la souplesse, avec une trompe à mercure, et l'on peut y faire régner telle pression que l'on veut.

Réglages. — 1° Le disque fixe inférieur est d'abord réglé horizontalement à l'aide d'un niveau.

2° Le disque fixe supérieur est réglé ensuite parallèlement au précédent. Pour cela, on règle chaque moitié en l'amenant en contact

avec des cales de verre d'épaisseur bien égale, posées sur le disque inférieur.

3° On règle ensuite le disque mobile de manière qu'il soit bien parallèle aux deux précédents et à égale distance de chacun d'eux : on se sert encore ici de cales de verre d'égale épaisseur, soigneusement vérifiées au sphéromètre. On admet que ces réglages subsistent quand on fait le vide.

Suspension. — La suspension bifilaire a été choisie parce que la viscosité propre de chaque fil n'intervient presque pas, lorsque le couple de torsion est presque entièrement fourni par le poids du disque, comme cela avait lieu avec les fils d'argent de 30^{cm} de longueur et d'environ 63^{μ} de diamètre.

203. Corrections. — Kundt et Warburg ont vérifié, par une expérience directe, que l'amortissement dû à la viscosité des fils de suspension (viscosité métallique) et au frottement de l'air contre la tige et le miroir n'était qu'une fraction négligeable ($\frac{1}{200}$ environ) de l'amortissement total.

Pour le reconnaître, on enlève les disques fixes et mobile. On suspend au bifilaire un disque de zinc de $3^{cm},7$ de diamètre, qui pèse 31^{g}; on rapproche les deux fils de suspension de manière à obtenir une période de $39^{s},6$ sensiblement égale à celle des autres expériences. Le décrément devient 0,00808 (log. décimaux); il faut le multiplier par le moment d'inertie 56 du disque de zinc pour avoir la résistance, et le diviser par le moment d'inertie 1960 du disque frottant pour avoir le décrément dû à cette partie de la résistance dans les expériences de viscosité; ces opérations donnent 0,00023, soit 1 : 80 du décrément le plus faible que l'on ait réussi à obtenir avec l'hydrogène à basse pression 0,0185.

Un des inconvénients du bifilaire est que le disque mobile n'oscille pas rigoureusement dans un plan fixe; il monte et descend quand le bifilaire se tord et se détord. Il en résulte que la distance entre le disque mobile et les disques fixes est incessamment variable. Mais Kundt et Warburg ont choisi des fils assez longs et assez rapprochés pour que cette variation fût insignifiante. Ils ont calculé que, avec les fils choisis et aux plus grandes amplitudes qu'ils aient réalisées, la distance du disque mobile aux disques fixes n'a jamais varié de plus de $0^{\mu},06$, quantité absolument négligeable devant la distance moyenne elle-même, qui était de l'ordre du millimètre.

Pour la correction des bords, ils ont adopté la formule de Maxwell.

Nous avons fait remarquer ([1]) que cette correction comporte une erreur possible à cause de l'incertitude où l'on est sur le véritable bras de levier du couple correcteur. Mais la différence entre les corrections additives extrêmes à faire au diamètre du disque était très faible devant le diamètre total du disque mobile, à cause du très faible écartement des disques fixes. En appelant R le rayon du disque mobile, le terme $\frac{\pi}{2}R^4$, qui entre dans la formule, doit être remplacé, en faisant la correction de Maxwell, par

$$\frac{\pi}{2}R^4\left(1+\frac{4\alpha}{R}\right).$$

$\frac{4\alpha}{R}$ est la valeur relative du terme correctif.

Or, l'épaisseur d'air qui séparait les disques fixes a été, dans les expériences de Kundt et Warburg, de 1^{mm}, 2^{mm}, 3^{mm}. Les valeurs de $\frac{4\alpha}{R}$ ont été respectivement dans ces trois cas :

$$0,0381,$$
$$0,0514,$$
$$0,0715.$$

Dans le cas le plus défavorable, elle n'a donc pas dépassé le $\frac{1}{14}$ de la valeur du terme principal. L'incertitude sur cette correction ne dépasse pas le dixième; on voit que l'erreur possible sur la valeur à adopter pour $\frac{\pi R^4}{2}\left(1+\frac{4\alpha}{R}\right)$ n'a pas dépassé $\frac{1}{140}$.

204. Contrôle des basses pressions. — Kundt et Warburg se proposant d'atteindre de très basses pressions, des précautions spéciales furent prises contre les fuites.

1° La cloche repose sur le plan par un très large bord soigneusement rodé; une trace de graisse passée sur tout le pourtour de la cloche, sans déborder à l'intérieur, assure une fermeture parfaite.

2° Partout ailleurs, les joints inévitables sont faits avec un mastic analogue au Golaz.

3° Les jonctions à la trompe à mercure sont assurées, sans aucun caoutchouc, à l'aide de tubes de verre soudés, longs et plusieurs fois coudés pour obtenir une certaine souplesse.

Pour contrôler le vide et s'assurer que la pression, si faible qu'elle

---

([1]) Chap. V, nos 83-84.

fût, restait bien constante, Kundt et Warburg, qui ne connaissaient pas encore la jauge de Mac-Leod, étudiaient les pertes de chaleur, par rayonnement, d'un thermomètre placé dans l'enceinte vide. Ce thermomètre est représenté en *e* dans la figure 67. La moindre trace d'hydrocarbures ou de vapeurs absorbantes se révélerait alors par une augmentation considérable du rayonnement.

Une des grosses difficultés des expériences a été l'élimination de la vapeur d'eau; la méthode des vides successifs, avec rentrées consécutives d'air sec, ne s'est pas montrée suffisante. Il a été impossible de l'éliminer complètement; on n'a pu, à cause de cela, maintenir constante une pression inférieure à $0^{mm},1$.

205. Résultats. — Les expériences ont porté sur l'air, sur l'acide carbonique, sur l'hydrogène et sur la vapeur d'eau.

Pour l'air, sous des pressions comprises entre 380^{mm} et 20^{mm} de mercure, le décrément logarithmique λ, proportionnel à la viscosité μ, s'est montré absolument constant, conformément à la théorie. Pour une distance de 1^{mm} entre les plateaux, ce n'est qu'au-dessous de 8^{mm} que λ a commencé à décroître, sans tomber au-dessous des $\frac{4}{5}$ de sa valeur primitive, même à la plus basse pression, $0^{mm},63$. Cette décroissance est d'autant moindre que l'écart des plateaux est plus grand.

Distance des plateaux : $1^{mm},104$.

Pressions en millimètres de mercure.	Décrément logarithmique ramené à la température de 15° d'après la loi de Maxwell.
380	0,1318
380	0,1318
20	0,1306
7,7	0,1292
7,6	0,1292
2,4	0,1256
2,4	0,1256
2,4	0,1245
1,53	0,1198
1,53	0,1198
0,63	0,1104
0,63	0,1109

Distance des plateaux : 1^{mm},967.

Pressions en millimètres de mercure.	Décrément à 15°.
750	0,0579
750	0,0581
380	0,0586
380	0,0586
380	0,0582
20,5	0,0582
20,5	0,0582
2,4	0,0566
2,4	0,0568
1,53	0,0556
1,53	0,0554
1,53	0,0553
0,63	0,0528
0,63	0,0525

Distance des plateaux : 2^{mm},8.

Pressions en millimètres de mercure.	Décrément à 15°.
750	0,0426
380	0,0425
20,5	0,0424
7,3	0,0419
2,4	0,0413
1,53	0,0405
0,63	0,0394

L'acide carbonique et l'hydrogène donnent des résultats analogues, mais avec des rapidités de décroissance différentes.

Ainsi, le décrément logarithmique dépend de la nature du gaz, de la pression et de la distance des plateaux.

206. Glissement. — D'un point de vue purement expérimental, l'allure de la variation en fonction de la distance et de la pression suggère l'idée d'un glissement, fonction de la seule pression, négligeable aux fortes pressions, équivalent à une augmentation de distance en raison inverse de la pression ; c'est aussi ce qu'indique la théorie cinétique sous son aspect le plus général, l'épaisseur additionnelle devant être pour un même gaz proportionnelle au chemin

moyen, c'est-à-dire en raison inverse de la densité, ou à température constante, de la pression.

L'influence de ce glissement se traduit dans les formules par la substitution d'une distance fictive $D' = D + \frac{2a}{p}$ à la vraie distance D. Le décrément logarithmique λ doit être alors égal à $\frac{\mu}{D'}$.

Si μ est indépendant de la densité, le produit

$$\lambda D' = \lambda D\left(1 + \frac{2a}{Dp}\right)$$

doit être constant.

C'est en effet ce que donnent les expériences de Kundt et Warburg.

Dans chacun des Tableaux suivants λ est calculé par la formule

$$\lambda\left(1 + \frac{b}{p}\right) = \lambda_0;$$

la pression est évaluée en millimètres de mercure.

PREMIÈRE SÉRIE. — *Air.*

$D = 0^{cm},1104$, $\lambda_0 = 0^{cm},132$, $b = 0,149$.

Pressions.	λ observé.	λ calculé.
mm		
20	0,131	0,131
7,6	0,129	0,129
2,4	0,125	0,124
1,53	0,120	0,120

DEUXIÈME SÉRIE. — *Air.*

$D = 0^{cm},1967$, $\lambda_0 = 0^{cm},0583$, $b = 0,0700$.

Pressions.	λ observé.	λ calculé.
mm		
2,4	0,0567	0,0566
1,53	0,0554	0,0557
0,63	0,0527	0,0525

TROISIÈME SÉRIE. — *Air.*

$D = 0^{cm},2802$, $\lambda_0 = 0^{cm},0425$, $b = 0,0612$.

Pressions.	λ observé.	λ calculé.
mm		
7,3	0,0419	0,0422
2,4	0,0413	0,0415
1,53	0,0405	0,0409
0,63	0,0394	0,0387

La concordance dans chaque série est satisfaisante.

En outre, $\lambda_0 D$ et $b \times D = 2a$ doivent être les mêmes dans les trois séries.

D.	b.	$b \times D = 2a$.	λ_0.	λ_0D.
cm				
0,1104	0,149	0,0164	0,132	0,0146
0,1967	0,070	0,0138	0,0583	0,0115
0,2802	0,0612	0,0171	0,0425	0,0119

La concordance est ici plus grossière, mais cela ne peut surprendre, le difficile réglage du parallélisme des plateaux devant être refait pour chaque série.

On peut admettre pour l'air la moyenne $2a = 0,016$, quand on évalue la pression en millimètres de mercure et la distance des plateaux en centimètres.

Pour l'air, à la pression atmosphérique, l'épaisseur additionnelle est donc

$$\varepsilon_{760} = \frac{1}{2}\frac{0,016}{760} = 0^{cm},0000105 = 105.10^{-7}.$$

Ainsi, à la température de 15° C. et à la pression de 760^{mm}, l'épaisseur due au glissement de l'air est environ

$$0^{cm},00001 \quad \text{ou} \quad 0^{\mu},1.$$

D'après les nombres de Kundt et Warburg, on trouve de même

Pour l'hydrogène............ $\varepsilon_{760} = \dfrac{0,014}{760} = 184.10^{-7}$

Pour CO^2.................. $\varepsilon_{760} = \dfrac{0.0045}{760} = 59.10^{-7}$

Enfin, d'après la théorie de Kundt et Warburg, ces épaisseurs dues au glissement devraient être égales à 0,71 fois le chemin moyen. Les chemins moyens sous la pression d'une atmosphère à 15° C. seraient donc

Air.	Hydrogène.	Acide carbonique.
148.10^{-7}	258.10^{-7}	83.10^{-7}

tandis que les chemins moyens déduits des viscosités ont, d'après divers auteurs, les valeurs suivantes :

	Air.	Hydrogène.	Acide carbonique.
Stefan et Graham, 15°, tubes....	83.10^{-7}	153.10^{-7}	56.10^{-7}
Obermayer, 0°, tubes...........	90	182	63
Kundt et Warburg, 10°, disques.	92	171	60

Cette comparaison montre que le coefficient 0,71 calculé par Kundt et Warburg est trop petit; l'expérience conduit aux rapports

Air.	Hydrogène.	Acide carbonique.
1,27	1,20	1,48
1,15	1,02	1,27
1,15	1,08	0,98

suivant les viscosités adoptées. Ces nombres, tous supérieurs à 0,71, mais peu différents de 1, ne suffisent à confirmer rigoureusement ni la valeur numérique calculée par Kundt et Warburg, ni l'hypothèse adoptée par eux de l'influence unique du chemin moyen [1]. Toutefois, l'écart n'est pas très grand; si l'on admet qu'il tient surtout aux difficultés de l'expérience, nous en conclurons que les différences de dimension des molécules gazeuses, comparées à la forme de la paroi, n'ont pas d'importance; ceci serait inexplicable pour une paroi clivée ou fondue, dont les irrégularités sont seulement celles qui proviennent de l'entassement des molécules solides, évidemment de même ordre de grandeur que les molécules gazeuses. Mais, quel qu'ait été le poli des disques de Kundt et Warburg, il est vraisemblable qu'ils présentaient des rugosités énormes vis-à-vis des dimensions moléculaires. Dans ces conditions, ce sont ces rugosités qui interviennent dans les phénomènes et, en ce sens, il peut être vrai de dire que les dimensions des molécules de gaz sont négligeables devant les rugosités du verre.

Comme conclusion générale des expériences de Kundt et Warburg, on peut affirmer d'une façon certaine avec eux :

1° Qu'il y a un glissement à la paroi, de l'ordre du chemin moyen;

2° Qu'en en tenant compte, le coefficient μ de viscosité est absolument constant pour toutes les pressions comprises entre la pression atmosphérique et 1^{mm} de mercure environ.

207. Basses pressions. — Kundt et Warburg ont opéré à des pressions bien inférieures à $\frac{1}{10}$ de millimètre de mercure, mais sans pouvoir d'ailleurs maintenir les pressions constantes à cause d'un dégagement continu de la vapeur d'eau condensée sur les parois, ou pour d'autres causes inconnues. Ne pouvant faire des mesures com-

---

[1] De la théorie de Kundt et Warburg je ne dirai qu'un mot : l'hypothèse est que les molécules sont renvoyées d'une manière isotrope par la paroi, et que le trouble résultant ne dépasse pas l'épaisseur du parcours libre. Les calculs n'ont aucune généralité.

plètes, ils se sont bornés à chercher jusqu'à quel point on peut abaisser le décrément logarithmique en poussant la raréfaction aussi loin que possible.

Voici quelques nombres obtenus avec l'air :

Pressions.	Décrément λ ($D = 1^{mm}$).
Pression atmosphérique	0,08
Quelques centièmes de millimètre	0,0461
2e degré de vide	0,0351
3e » »	0,0321
4e » »	0,0301
Le lendemain matin	0,0357
Le deuxième jour	0,0407

On voit qu'on peut arriver à réduire le frottement aux $\frac{3}{8}$ de sa valeur primitive.

Pour l'hydrogène :

Pressions.	Décrément λ ($D = 1^{mm}$).
Pression atmosphérique	0,0387
3e degré de vide	0,0169
4e » »	0,0181

une autre série a donné :

	Décrément λ ($D = 1^{mm}$).
1er degré de vide	0,0180
2e » »	0,0140
3e » »	0,0119
4e » »	0,0121
Le lendemain	0,0220

D'ou viennent ces augmentations de λ, après des vides successifs, quand on laisse l'appareil un jour à lui-même ? La vapeur d'eau continue-t-elle à se dégager, ou bien faut-il admettre l'évaporation de traces de matières graisseuses ayant un coefficient de viscosité considérable ?

Crookes a obtenu, dans la suite, le même résultat pour des vides bien plus avancés ; on ne gagne plus rien à partir d'un certain degré de vide.

208. Valeurs absolues de μ d'après Kundt et Warburg. — Voici les nombres fournis par ces expériences :

A 15° pour l'air.....	(en C.G.S.) $\mu =$	193.10^{-6} 186.10^{-6} 187.10^{-6}	Moyenne 189.10^{-6}
A 15° pour H.......	μ (valeurs extrêmes)	90.10^{-6} 95.10^{-6}	Moyenne $92,3.10^{-6}$
A 15° pour CO^2.....	μ (valeurs extrêmes)	149.10^{-6} 156.10^{-6}	Moyenne 152.10^{-6}
A 15° vapeur d'eau..	μ		$97,5.10^{-6}$

On remarquera que ces valeurs de μ sont supérieures d'environ $\frac{1}{10}$ à celles obtenues au moyen des tubes capillaires. Obermayer, par exemple, trouve à 0°, pour les mêmes gaz : 170, 86 et 138.10^{-6}.

Cette différence reste inexpliquée.

Une forme simplifiée de l'appareil de Kundt et Warburg a été employée par M. Puluj ([1]), à Strasbourg, sous la direction de Kundt, pour étudier l'influence de la température sur la viscosité de l'air, de l'acide carbonique et de l'hydrogène, entre 0° et 30°, températures naturelles de la salle d'expériences de janvier à juillet.

Les résultats sont bien représentés par les formules suivantes :

Air....................	$0,000189\ (1+0,003695)^{0,72}$
Acide carbonique......	$0,000152\ (1+0,003706)^{0,91}$
Hydrogène...........	$0,0000923\ (1+0,003656)^{0,69}$

209. Vapeurs organiques. Schumann ([2]). — Après avoir étudié en 1881 l'écoulement des vapeurs à travers les tubes capillaires, en collaboration avec Lothar Meyer (Chap. II), M. Schumann a essayé de leur appliquer la méthode des oscillations. L'avantage important est que la densité reste constante et uniforme pendant toute la durée de l'opération; la loi de compressibilité et de dilatation de la vapeur n'intervient pas dans la mesure. Par contre, l'incertitude de la correction des bords, même dans un appareil comme celui de Kundt, laisse douteuses les valeurs absolues ; en outre, M. Schumann a malheureusement employé des durées d'oscillation de 6 à 9 secondes, trop courtes pour la distance de ses plateaux ($0^{cm},20$, $0^{cm},28$ et $0^{cm},465$); l'inertie du fluide intervient alors, et le décrément dépend,

([1]) *Carl Repert.*, t. XIII, 1877, p. 293.

([2]) Il les attribue à ce que la théorie néglige les termes de l'ordre de λ^2 (p. 375).

comme nous l'avons vu, de μ et de $\sqrt{\mu\rho}$ (Livre I, Chap. II, III, IV, V. En particulier n°s 85 et suivants). Sans soupçonner l'origine des écarts par rapport à la formule simple, qui ne s'applique qu'aux oscillations lentes, M. Schumann s'est borné à constater que ses expériences donnent une viscosité déterminée si on les calcule à l'aide d'une formule

$$\mu = c\,\frac{\lambda}{T}(1 - yc\lambda D),$$

où λ est le décrément observé pour une distance D entre le plateau fixe et le plateau mobile, T la période, c la constante calculée par la théorie de Maxwell au moyen des dimensions de l'appareil, et y une constante empirique. On peut remarquer que la théorie conduirait à une formule approximative de ce genre.

Pour l'air, cette correction était de $\frac{1}{15}$ à la distance de $0^{cm},46$; grâce à elle, l'influence de la distance est en effet très bien éliminée [1]; une correction de même forme, appliquée aux expériences de Kundt et Warburg, les améliore et les fait concorder avec celles de Schumann

Le disque de verre, de $5^{cm},4$ de rayon, est suspendu par deux fils d'argent de 52^{μ} de diamètre, écartés de 4^{mm}; le miroir est métallique.

La plus grande difficulté technique a été d'obtenir un appareil étanche pour les vapeurs de benzine et d'éthers variés à 100°. Il faut, en effet, que la vapeur soit pure de tout mélange pendant toute la durée de l'expérience.

L'enceinte est en laiton soudé; elle repose sur un plan de laiton; le joint est rendu étanche par serrage d'un anneau de caoutchouc ; la glace, qui laisse voir le miroir, est serrée entre deux rondelles de caoutchouc. Trois ouvertures sont réservées pour le thermomètre, le manomètre et la communication avec la pompe à mercure.

Pour que l'expérience d'oscillation ait un sens, il faut que la température soit uniforme, et qu'il n'y ait pas de courant de convection dans l'enceinte. La cloche de laiton est entièrement enveloppée par une autre cloche métallique, elle-même entourée d'ouate; on fait circuler entre les deux de la vapeur d'alcool méthylique ou de la vapeur d'eau.

---

[1] *Loc. cit.*, p. 370.

Toutes ces difficultés rendent paradoxale la préférence que M. Schumann finit par accorder à la méthode des oscillations sur celle de l'écoulement.

Des expériences sur l'air se sont résumées par la formule suivante :

$$\mu = 0{,}0001679\,(1 + \alpha\theta)^n$$

avec

θ	17°	25°	63°	98°	100°
n	0,81	0,84	0,91	0,91	0,99

pour la meilleure série.

La grandeur et la variation irrégulière de l'exposant ainsi déterminé n'inspirent guère confiance.

Schumann revient à l'interprétation primitive de la théorie cinétique, dont L. Meyer voulait tirer parti : le diamètre moléculaire σ est proportionnel à $\sqrt[4]{\frac{1+\alpha\theta}{\mu^2}}$; mais, oubliant que α doit être, dans cette formule, le coefficient de dilatation des gaz *parfaits,* il adopte les formules suivantes :

$$\text{Air}\ldots\ldots\quad \frac{\mu}{\mu_0} = (1 + 0{,}003665\,\theta)^{\frac{1}{2}}(1 + 0{,}0000802\,\theta)^2$$

Le coefficient 0,0000802 est une moyenne; les extrêmes sont 0,000700 et 0,000833.

$$\text{Acide carbonique}\ldots\ldots\quad \frac{\mu}{\mu_0} = (1 + 0{,}003701\,\theta)^{\frac{1}{2}}(1 + 0{,}000889\,\theta)^2$$

$$\text{Vapeurs de benzine et des éthers étudiés}\ldots\ldots\quad \frac{\mu}{\mu_0} = (1 + 0{,}004\,\theta)^{\frac{1}{2}}(1 + 0{,}00164\,\theta)^2$$

Ce coefficient 0,00164 est la moyenne de sept autres relatifs à 7 éthers différents; le plus petit est 0,00109, le plus grand 0,00225; malgré cette énorme inégalité, « comme ces nombres ne varient pas régulièrement avec le poids moléculaire », on doit regarder leurs différences comme dues aux erreurs d'expérience et attribuer la même valeur à tous les éthers.

Cela suffit à donner une idée de la difficulté des expériences et de la précision médiocre qu'elles comportent.

Les viscosités trouvées à zéro sont :

Formiate de méthyle...........	0,00008380
» . d'isobutyle...........	7139
Acétate de propyle.............	6855
Propionate d'éthyle............	7079
Isobutyrate de méthyle........	7011
Acétate d'isobutyle............	7010

Les volumes moléculaires qu'on en déduit ont des rapports d'autant plus différents de ceux de Kopp que le poids moléculaire est plus élevé.

CHAPITRE III.

ÉCOULEMENT PAR UN TUBE ÉTROIT.

210. Formule du débit. — La théorie rigoureuse de l'écoulement isotherme d'un gaz à travers un tube cylindrique n'a pas encore été faite; la difficulté provient de la variation de densité qui accompagne la variation de pression; le volume écoulé augmente à mesure que la pression baisse, lorsque la masse de gaz débitée reste constante. Les simplifications, dues à l'incompressibilité, qui ont facilité l'intégration pour les liquides (nos 62 et suiv.), ne peuvent être acceptées, dans le cas des gaz, qu'à titre approximatif, lorsque la variation de densité le long du tube est lente. Avec cette hypothèse, la formule du débit en volume (nos 64, 65)

$$I = \frac{P}{l}\frac{\pi r_1^4}{8\mu}\left(1+\frac{4\varepsilon}{r_1}\right)$$

est applicable à chaque élément de longueur; elle donne pour le débit en masse M constant tout le long du tube en adoptant une valeur moyenne pour l'épaisseur de glissement ε :

$$M = \rho I = -\frac{\pi r_1^4}{8\mu}\left(1+\frac{4\varepsilon}{r_1}\right)\rho\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\pi r_1^4}{8}\left(1+\frac{4\varepsilon}{r_1}\right)\int_0^l \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x};$$

lorsque la température reste uniforme, appliquons la loi de Mariotte, *et la loi de Maxwell sur la constance de la viscosité* μ

$$\text{(I)} \qquad M = \frac{\pi r_1^4}{8l}\left(1+\frac{4\varepsilon}{r_1}\right)\frac{p_0^2-p_1^2}{2\mu}\left(\frac{\rho}{p}\right).$$

Cette formule a été proposée par O.-E. Meyer (1866) (¹) et par Bous-

(¹) Liste des Mémoires de Meyer (*Ueber die innere Reibung der Gase*) :

1° *Sur l'amortissement du pendule* (*Pogg. Ann.*, t. CXXV, 1865, p. 177).

2° *Expériences sur les disques oscillants* (*Pogg. Ann.*, t. CXXV, 1865, p. 401 et 564).

3° *Écoulement des gaz à travers les tubes capillaires : Théorie et discussion des expériences de Graham* (*Pogg. Ann.*, t. CXXVII, 1866, p. 253 et 353).

4° *Discussion des expériences de Maxwell sur les disques oscillants* (*Pogg. Ann.*, t. CXLIII, 1871, p. 14).

5° *Expériences propres de Meyer sur les tubes capillaires* (*Pogg. Ann.*, t. CXLVIII, 1873, p. 1, 203, 526).

sinesq (1868). Il ne faut pas perdre de vue, en l'appliquant, que la chute totale de pression ne doit pas être grande ; car le mouvement n'est sensiblement cylindrique que dans une partie restreinte du tube; chaque filet cylindrique s'épanouit de plus en plus à mesure qu'il avance dans le tube.

J'ajouterai que, à cause de sa faible densité, le gaz prend une grande vitesse ; la correction de force vive, dont nous avons vu l'utilité dans le cas des liquides, est également nécessaire ici. Cette force vive est celle du jet émergent; le travail qu'elle a exigé correspond à une chute de pression

$$\delta p_1 = \frac{\rho_1}{(\pi r_1^2)^2}\left(\frac{M}{\rho_1}\right)^2$$

d'après les calculs des n^{os} **118** et **119**. On a donc

$$\delta(p_1^2) = \left(\frac{p}{\rho}\right)\frac{2M^2}{\pi^2 r_1^4}.$$

Aucun auteur ne paraît avoir fait cette correction.

La formule finale est donc, pour les pressions p_0, p_1, mesurées dans les réservoirs,

$$(11)\qquad p_0^2 - p_1^2 = \left(\frac{p}{\rho}\right)\left[\frac{16\mu l M}{\pi r_1^4\left(1+\frac{4\varepsilon}{r_1}\right)} + \frac{2M^2}{\pi^2 r_1^4}\right].$$

Le rapport du terme de force vive au terme de viscosité $M : 8\pi\mu l$ atteint $\frac{1}{100}$ pour l'air à zéro, lorsque la masse débitée M, en grammes, est $\frac{1}{20000}$ de la longueur du tube en centimètres, soit 5^{mg} par seconde, environ 4^{cm^3}, pour un tube de 1^m de longueur. Ce rapport diminue à haute température.

La viscosité apparente, calculée en négligeant ce terme, est trop grande.

211. Expériences de Graham. — Thomas Graham ([1]), le premier, a étudié les phénomènes d'écoulement des gaz :

1° Dans le cas de l'écoulement à travers un trou visible percé en mince paroi;

([1]) Ses Mémoires ont été publiés dans : *Quarterly Journal of Science*, 1829; *Phil. Trans. Édimb.*, 1831; *Phil. Trans. Lond.*, 1846, 1849, 1863. Ils ont été traduits dans les *Ann. de Chim. et de Phys.*, 4e série, t. I, II, III, 1864, et dans le t. XXVIII de la 3e série, 1850, p. 457.

2° Dans le cas de cloisons poreuses;

3° Dans le cas de tubes capillaires.

Graham a mesuré les vitesses d'écoulement des gaz sous une différence de pression d'une à plusieurs atmosphères, à travers des tubes très longs et très étroits, la mesure étant faite tantôt à l'entrée, tantôt à la sortie du gaz.

Ces expériences ont fourni la première démonstration de l'existence de la viscosité comme propriété distincte; les valeurs relatives obtenues pour un grand nombre de gaz sont très bonnes; enfin, l'une des lois de Graham prouve implicitement que la viscosité des gaz est indépendante de la densité à température constante, comme l'a établi Maxwell plus tard.

Dans un premier appareil, le tube capillaire fait communiquer une ampoule jaugée V avec une cloche R, où une machine pneumatique maintient une pression très faible.

Dans l'ampoule de volume V remplie du gaz à étudier règne une pression que l'on maintient constamment égale à la pression atmosphérique en enfonçant l'ampoule progressivement dans la cuve à eau à mesure que l'écoulement se produit, de manière que le niveau de l'eau soit sans cesse le même à l'intérieur de l'ampoule et à l'extérieur. On compte le temps que l'ampoule met à se remplir d'eau.

Tous les gaz étaient desséchés avant leur entrée dans le capillaire, par leur passage sur de l'amiante imbibée d'acide sulfurique.

Dans cette première série d'expériences, les gaz étudiés ont été : O, Air, H, CH^4, CO.

Dans une deuxième série d'expériences de comparaison entre le gaz carbonique et l'air, le volume du gaz était mesuré après l'écoulement à cause de la solubilité du gaz carbonique dans l'eau. Le gaz entrait dans le tube capillaire sous la pression atmosphérique, et l'on notait le temps que la différence de pression entre l'intérieur du récipient R et l'extérieur (mesurée par le manomètre tronqué de la machine) mettait à passer de $28^p,5$ à $23^p,5$ (723^{mm} à 596^{mm}).

Les longueurs des tubes capillaires employés ont varié depuis 6^m jusqu'à $0^m,50$ environ. Le plus long avait exactement $237^p,875$ et $\frac{1}{45}$ de pouce de diamètre (environ $0^{mm},55$); tous les autres tubes avaient le même diamètre.

Quelle que soit la longueur du tube, on trouve qu'en prenant pour unité le temps que met l'oxygène à s'écouler au travers de ce tube, le temps que met l'air est, pour le même tube, toujours 0,9, sauf pour les tubes très courts où le rapport est 0,91. Cette légère différence

tient à l'énorme chute de pression, quoique la longueur du tube le plus court fût encore très considérable par rapport au diamètre (environ mille fois plus grande).

Pour l'oxyde de carbone, même résultat : 0,87 pour presque tous les tubes ; 0,89 pour les plus courts.

Le formène donne des perturbations un peu plus grandes pour les tubes courts, et le gaz carbonique en donne de considérables.

C'est évidemment l'influence du terme de force vive qui se révèle pour les tubes courts.

Dans un second appareil le gaz est comprimé dans un vase métallique M à une pression indiquée par un manomètre, supérieure d'environ 20 pouces (508^{mm}) à la pression atmosphérique. Le tube capillaire adapté directement sur ce réservoir M débouche dans l'atmosphère. On note les temps que la différence de pression, par suite de l'écoulement du gaz, met à passer successivement de 20 pouces à

15, 10, 8, 6, 4, 2 pouces.

Ici, la densité est plus uniforme que dans les expériences précédentes.

212. Résultats. — *Loi des longueurs.* — De l'ensemble de ses expériences, Graham a déduit une première loi :

La résistance d'un tube de diamètre donné est proportionnelle à sa longueur.

Loi des pressions. — Graham a recherché, en outre, comment varie la vitesse d'écoulement d'un gaz donné, quand on fait varier sa force élastique.

Le gaz est contenu dans deux réservoirs H_1 et H_2 munis de manomètres, et le tube capillaire fait communiquer le réservoir H_2 avec le récipient d'une machine pneumatique où l'on a établi une différence de pression de 28,5 pouces avec l'extérieur. Le gaz s'écoule à travers le capillaire et la pression monte dans le récipient de la machine pneumatique ; on note le temps nécessaire pour que la différence de pression entre ce récipient et l'extérieur passe de 28,5 pouces à 23,5 pouces. Le robinet R est réglé de manière à maintenir la pression constante dans H_2. Le gaz entre dans le tube sous une densité constante ; il arrive dans le récipient de la machine pneumatique où la pression est de quelques millimètres de mercure.

Ce que mesurait Graham ce sont les temps d'écoulement t' de

masses égales de gaz, qui produisent toujours la même variation de pression dans le récipient, prises sous diverses forces élastiques initiales. Il en déduisit, en multipliant par les pressions, les durées d'écoulement $t = Pt'$ de volumes égaux mesurés chacun sous la pression correspondante dans H_2.

A température constante, les vitesses de passage de volumes égaux d'air pris sous diverses pressions, de 1^{atm} à $2^{atm},5$ à travers un même capillaire, sont directement proportionnelles à ces pressions.

Soient :

v ce volume commun;
t la durée d'écoulement correspondant à une densité d;
P la pression du gaz dans H_2.

La loi de Graham

$$Pt = P^2 t' = \text{const.}$$

est très nette, comme le montrent les nombres suivants :

Pressions.	Temps $t = Pt'$ observé.	Temps t calculé d'après la première mesure.
atm	sec	sec
1	1095,5	1095,5
1,25	883,1	884,8
1,50	739,5	737,3
1,75	628,25	632,0
2,00	553,0	553,0
2,25	489,4	491,5
2,50	440,0	442,0

Nous verrons plus loin la signification théorique de cette loi.

Influence de la température. — Cette influence a été étudiée dans des limites peu étendues (0° C. à 60° C.) sur l'air, l'hydrogène, le gaz carbonique et des mélanges d'hydrogène et d'azote.

La chaleur agit pour diminuer la vitesse d'écoulement de volumes égaux, exactement comme pourrait le faire une diminution de force élastique.

Pour établir cette loi, il a été nécessaire d'employer des capillaires

d'une résistance très considérable, sans quoi on observait des écarts notables.

Il résulte de cette loi et de celle des pressions, que les durées d'écoulement de volumes égaux de deux gaz différents, pris sous la même température et la même pression, sont dans un rapport constant, c'est-à-dire indépendant de la température et de la pression communes.

Les nombres de Graham donnent :

Air .... $t = t_0(1 + 0,0018\,\theta)$;
H ..... $t = t_0(1 + 0,0021\,\theta)$;
t ...... Durée d'écoulement d'un volume donné à la température θ;
t_0 ...... Durée d'écoulement du même volume à 0°.

Le coefficient d'augmentation de résistance à l'écoulement est de l'ordre de la moitié du coefficient de dilatation des gaz.

213. Comparaison avec la formule théorique. — Après avoir établi la formule (I), Meyer l'a employée à la discussion des expériences de Graham.

Dans la première et la troisième série d'expériences, p_1 est négligeable; la masse M débitée par seconde est proportionnelle à $\frac{p_0}{t}$ puisque le volume est constant, pour un même gaz à la même température; la formule (I) montre que $\frac{p_0^2}{M}$, et par suite $p_0 t$, doit être indépendant de la pression pour un même gaz.

M. Meyer a tiré les nombres suivants des expériences de Graham sur les longs tubes :

p_0.	1^{atm}.	$0^{atm},75$.	$0^{atm},50$.
$p_0 t$	799,5	787,5	771,75

Ces nombres, peu différents, décroissent lentement avec p_0, montrant ainsi que, même avec les plus longs tubes de Graham, l'influence du terme de force vive se fait sentir conformément à la formule (II).

Si le gaz est reçu dans un réservoir de volume constant, c'est la pression qui varie; on peut appliquer la formule (I) à chaque instant si l'écoulement est assez lent, et M est proportionnel à $+V_1 \frac{dp_1}{dt}$, ou à $-V_0 \frac{dp_0}{dt}$, par le même coefficient si le réservoir de volume constant est à l'entrée du tube.

Supposons la pression p_0 constante, comme dans les expériences

de Graham, la formule (I) conduit à l'équation

$$p_0^2 - p_1^2 = AV_1 \frac{dp_1}{dt},$$

où A est une constante, pour un tube et un gaz déterminés, à température constante.

On en tire

$$\frac{dt}{AV_1} = \frac{dp_1}{p_0^2 - p_1^2},$$

et, en intégrant de o à t, de p_1 à p'_1,

$$\frac{t}{AV_1} = \frac{1}{2p_0} \log \left(\frac{p'_1 + p_0}{p_1 + p_0} \times \frac{p_1 - p_0}{p'_1 - p_0} \right).$$

Cette formule a été appliquée par Meyer aux nombres de la troisième série d'expériences de Graham ([1]).

p_0.	2^{atm}.	$1^{atm},75$	$1^{atm},5$.	$1^{atm},25$.	1^{atm}.
$\frac{1}{2}AV_1$	32100	31400	30700	29900	29700
BV_1	16000	18000	20500	24000	29700

Chacun des nombres correspond à plusieurs mesures faites avec la même pression d'entrée p_0, sous différentes pressions de sortie p_1; les nombres concordaient à $\frac{1}{300}$ près.

Si, au lieu de supposer μ indépendant de ρ, on admettait l'hypothèse qu'avait proposée Stokes, de la proportionnalité de μ à la densité ρ, on aurait

$$\frac{dt}{BV_1} = \frac{dp}{p_0 - p_1}, \quad \text{d'où} \quad \frac{t}{BV_1} = \log \frac{p_1 - p_0}{p'_1 - p_0},$$

et la combinaison qui devrait être constante serait

$$BV_1 = \frac{t}{\log \frac{p_1 - p_0}{p'_1 - p_0}} = \frac{AV_1}{2p_0} \log \frac{p'_1 + p_0}{p_1 + p_0}.$$

La comparaison de la seconde et de la troisième ligne ne laisse aucun doute.

Une autre série d'expériences de Graham ([1]), où l'on faisait varier la pression motrice, a donné les nombres suivants :

p_0.	$2^{atm},5$.	$2^{atm},25$.	2^{atm}.	$1^{atm},75$.	$1^{atm},5$.	$1^{atm},25$.	1^{atm}.
$\frac{1}{2}AV_0$	228000	228000	230000	228000	229000	227000	224000

([1]) *Phil. Trans. R. S. Lond.*, 1846.

Les écarts sont encore plus faibles que dans le cas précédent.

Ces expériences suffisent donc à établir que la viscosité est indépendante de la densité à température constante.

Dans sa discussion, M. Meyer a examiné l'influence possible d'un changement de température adiabatique accompagnant la variation de pression dans le réservoir, et il a montré que ce changement peut expliquer l'allure systématique, le sens et l'ordre de grandeur de ces écarts.

Néanmoins, il me semble difficile de supposer adiabatiques les variations de pression assez lentes de ces expériences; c'est plutôt à l'influence de la force vive, non considérée par M. Meyer, que j'attribuerais le rôle principal. Par suite de ce terme la durée d'écoulement calculée en partant de la formule (I) au moyen des pressions, serait plus petite que la durée observée si l'on donnait à AV_1 sa valeur exacte; la valeur de AV_1, tirée des observations, doit donc être trop grande, d'autant plus que le débit ou la pression motrice est plus grande; c'est bien le sens des écarts.

214. Viscosités des principaux gaz. — Les expériences de Graham fournissent de bonnes mesures relatives. Graham a trouvé en effet que, lorsqu'on compare deux gaz, le rapport de leurs vitesses d'écoulement pour un même tube et dans les mêmes limites de pression est absolument indépendant de ces conditions.

Gaz.	Coefficients de transpiration.
Oxygène	1,000
Air	0,899
Bioxyde d'azote	0,878
Azote	0,873
Oxyde de carbone	0,870
Acide carbonique	0,755
Protoxyde d'azote	0,752
Acide chlorhydrique	0,736
Chlore	0,687
Acide sulfureux	0,654
Acide sulfhydrique	0,616
Gaz des marais	0,555
Chlorure de méthyle	0,547
Gaz oléfiant	0,516
Ammoniaque	0,511
Cyanogène	0,506
Chlorure d'éthyle	0,499
Éther méthylique	0,483
Hydrogène	0,439

Les mesures absolues, au contraire, laissent à désirer. Meyer n'a trouvé, parmi les nombres de Graham, qu'un tube dont le jaugeage soit mentionné; la valeur du coefficient de frottement qu'on en déduit est de l'ordre de grandeur de celles qu'ont fournies les expériences ultérieures d'autres physiciens.

Longueur du tube.	Viscosités (C. G. S.) Air.	O.	H.	CO_2.
4 pouces.......	0,000178	0,000199		
2 pouces......	0,000177	0,000197	0,000087	
1 pouce........	0,000206	0,000216	0,000088	0,000182

Les écarts tiennent évidemment à l'influence de la force vive beaucoup plus sensible pour le tube court et d'autant plus importante que la densité du gaz est plus forte.

Variation avec la température (*Graham*). — Graham a obtenu avec une série de tubes

$$\mu = \mu_0(1 + \beta\theta).$$

Le coefficient β est de l'ordre de 0,0018 dans une série d'expériences, 0,0021 dans une autre. Mais des expériences sur des tubes beaucoup plus fins conduisent à un nombre très voisin du coefficient de dilatation des gaz 0,0037.

215. Expériences de Meyer à la température ambiante. — Après les discussions précédentes, Meyer publia enfin ses propres expériences (*Pogg. Ann.*, t. CXLVIII, 1873). Il fit deux séries de mesures avec deux appareils différents.

L'appareil (*fig.* 69) se composait de deux réservoirs solides en cuivre, A et B, de 2^l environ chacun, munis de manomètres, F, G, et de thermomètres, mis en communication par le tube capillaire K; le réservoir A était rempli du gaz à étudier, et le réservoir B, vide. Les robinets C, D et E étant fermés, tout était prêt pour le commencement de l'expérience.

En ouvrant le robinet E, on provoquait l'écoulement du gaz à travers K, de A vers B.

Deux observateurs lisaient simultanément de minute en minute les niveaux des manomètres.

La formule (I) donne, comme au n° 213,

$$p_0^2 - p_1^2 = AV_1\frac{\partial p_1}{\partial t} = -AV_0\frac{\partial p_0}{\partial t},$$

d'où l'on déduit

$$V_0 p_0 + V_1 p_1 = C$$

et ensuite

$$\frac{C\,dt}{A} = V_1 V_0 \frac{p_0\,dp_1 - p_1\,dp_0}{p_0^2 - p_1^2}.$$

Intégrant il vient

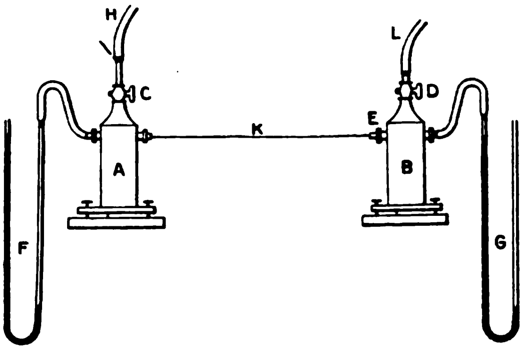
$$\frac{Ct}{A} = \frac{V_1 V_0}{2} \log \frac{p'_0 + p'_1}{p_0 + p_1} \frac{p_0 - p_1}{p'_0 - p'_1},$$

où l'on a

$$A = \frac{16 \mu l}{\pi R^4}.$$

La somme $V_1 p_1 + V_0 p_0$ devait être constante s'il n'y avait pas de

Fig. 69.



fuites; malgré les précautions prises cette constance n'a pas pu être obtenue à plus de $\frac{1}{70}$ ou $\frac{1}{80}$ près.

On a fait, quand elles étaient nécessaires, les petites corrections de pression dues à ce que, pendant le temps qui sépare deux observations successives, le gaz se détend d'un côté et par conséquent se refroidit, tandis qu'il s'échauffe de la même quantité de l'autre côté.

Meyer a fait 25 séries de mesures comprenant chacune de 4 à 10 observations à des températures allant de 13°,9 à 24°, et une série à 0°.

Dans toutes ces séries de mesures 3 tubes seulement ont été employés; leurs sections respectives étaient :

	cm^2	
Tube 1	0,000812	(en moyenne)
Tube 2	0,001114	»
Tube 3	0,001584	»

On les a employés sous des longueurs variables, comprises entre $0^m,50$ et $1^m,50$.

Résultats. — 1° La constante A est indépendante du sens de parcours du gaz dans le tube;

2° Pour les tubes de $1^m,50$ (très longs par rapport à leurs diamètres), le coefficient μ est indépendant de la pression moyenne;

3° La comparaison des 3 tubes de $1^m,50$, avec trois diamètres respectifs très différents, indique que le glissement à la paroi est insensible;

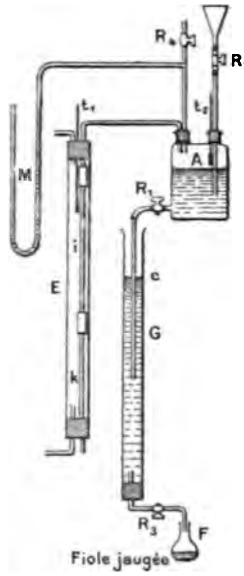
4° Les indications sur la variation de μ avec la température ne sont pas très précises. On a

à 0°	$\mu_0 = 0,000168$
à 14°,4	$\mu = 0,000184$
à 21°,1	$\mu = 0,000197$

En adoptant la formule $\mu = \mu_0\left(1 + \frac{3}{4}\alpha\theta\right)$ et en réduisant toutes les mesures à 0° d'après cette formule, Meyer obtient pour μ_0 des nombres variant entre 0,000168 et 0,000189. Ces écarts sont considérables et donnent une idée de la difficulté des expériences.

216. Deuxième appareil de Meyer (*fig.* 70); **variation de μ avec la température.** — Meyer a cherché à obtenir une pression constante

Fig. 70.



dans le vase qui reçoit le gaz au sortir du tube capillaire. L'air, aspiré par l'écoulement de l'eau du flacon A, traverse le tube large k puis le

tube capillaire i, tous deux entourés du manchon réchauffeur E à circulation d'eau.

Si le robinet R_3 est convenablement réglé, le niveau dans le manomètre M est constant; ce régime permanent s'établit de lui-même au bout d'un certain temps. A partir de ce moment, la pression dans A reste constante, le niveau baisse autant dans G que dans A. La quantité d'eau recueillie dans la fiole F pendant un temps donné est égale à celle qui s'est écoulée de G augmentée de celle qui s'est écoulée de A, cette dernière étant égale au volume du gaz entré dans A à travers le capillaire pendant ce même temps.

Trois séries d'expériences ont donné respectivement :

$$\mu_\theta = 0{,}000\,174\,(1 + 0{,}0021\,\theta),$$
$$\mu_\theta = 0{,}000\,171\,(1 + 0{,}0024\,\theta),$$
$$\mu_\theta = 0{,}000\,170\,(1 + 0{,}0028\,\theta).$$

C'est cette dernière formule qu'adopte Meyer; θ est la température centigrade.

217. Troisième appareil. (*Pogg. Ann.*, t. CXLVIII, p. 217). — Pour trancher définitivement la question du glissement à la paroi, il fallait opérer sur un tube beaucoup plus étroit avec des différences de pression beaucoup plus élevées et, pour cela, remplacer l'eau par le mercure (*fig.* 71).

L'air est aspiré dans une pipette A de 32^{cm^3}, entre les traits a et b. On maintient la différence de pression constante au manomètre M en déplaçant lentement le tube B.

On mesure le temps que l'air met à remplir la pipette, en traversant le tube capillaire i de $65^{cm},7$ de longueur et de $0^{cm^2},000\,15$ de section, maintenu à température constante.

		$p_1 - p_2$.	Durées d'écoulement.	Températures t.	Températures t'.	Coefficient de frottement.
			sec	°	°	
Avant l'échauffement.	en raréfiant.....	52,6	292	21,5	20,1	0,000182
	en comprimant..	55,6	767	22	20,6	0,000187
	en comprimant..	54,25	785	22	20,7	0,000187
	en raréfiant.....	51,25	313	22	20,5	0,000182
Tube chauffé à la vapeur d'eau.	en raréfiant.....	51,25	480	100°		0,000223
	en comprimant..	54,25	1189	100°		0,000227

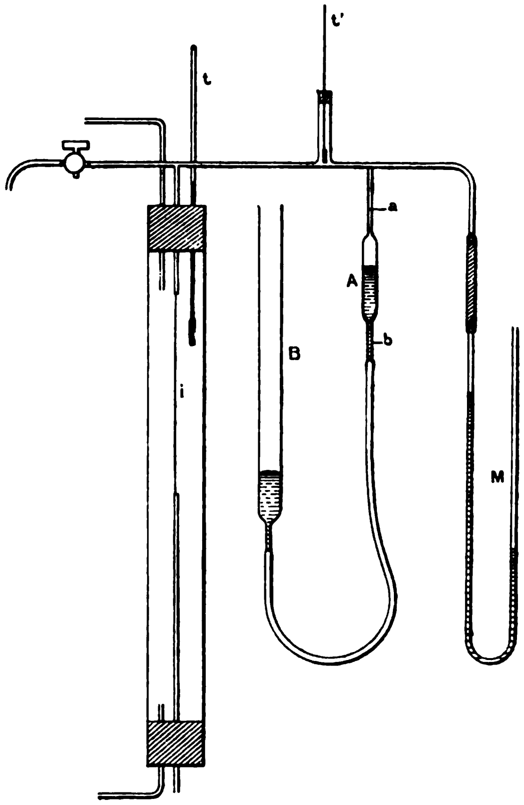
En admettant les valeurs moyennes suivantes du coefficient de frottement :

à 20°,5................ $\mu = 0,000\,184$
à 100°............... $\mu = 0,000\,225$

on obtient :

$$\mu_\theta = 0,000\,174\,(1 + 0,0030\,\theta).$$

Fig. 71.



218. Résultats des expériences de Meyer. — 1° Le coefficient μ_0 déduit des diverses mesures (par interpolation) oscille entre 170.10^{-6} et 175.10^{-6}; dans un Mémoire antérieur, Meyer avait indiqué la valeur 0,000 168 qu'il avait obtenue par une mesure directe à 0° ;

2° Le coefficient de variation avec la température a oscillé entre 0,0021 et 0,0030. Il semble donc bien acquis que ce coefficient est plus petit que le coefficient de dilatation des gaz ;

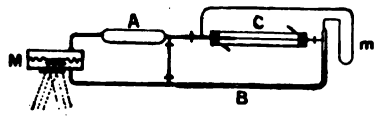
3° La bonne concordance des valeurs du coefficient de frottement

pour une même température, valeurs obtenues dans des conditions diverses et avec des diamètres de capillaires très différents, permet de penser que le glissement à la paroi est nul.

219. Warburg ([1]). **Le glissement dans les tubes.** — Ayant mis en évidence le glissement à la paroi des disques, dans ses expériences en collaboration avec Kundt, Warburg remarqua que dans les tubes étroits ce glissement doit jouer un rôle même sous des pressions encore assez élevées; car l'épaisseur à ajouter au rayon atteint 2^{μ} sous une pression de $\frac{1}{20}$ d'atmosphère pour l'air.

Dans l'appareil de Warburg le gaz, tout entier sous faible pression, s'écoule d'un réservoir de verre A dans un autre B, sous une différence de pression très faible, dont on suit les variations. L'observation directe de la différence de pression entre les deux réservoirs a l'avantage d'éliminer l'influence des faibles variations simultanées de température; le manomètre différentiel M est une simple membrane

Fig. 72.



ondulée de baromètre anéroïde qui sépare deux petites chambres métalliques en communication, l'une avec A, l'autre avec B; la déformation de la membrane produit la rotation d'un miroir contenu dans l'une des deux boîtes, percée d'une fenêtre à vitre pour l'observation.

Le manomètre M est taré par comparaison avec un manomètre à mercure *m*; chaque division vaut environ $0^{mm},33$ de mercure. Le volume de A et celui de B varient en sens inverse, par le déplacement de la membrane; A et B étant à la pression atmosphérique, on isole A, on produit en B une dépression déterminée, puis on isole B, et l'on rétablit la communication de A avec l'atmosphère, en lisant chaque fois le manomètre; on trouve que pour 1^{mm} de mercure le changement de volume est $0^{cm^3},032$.

Enfin, il faut déterminer le rapport des volumes V_A et V_B; pour cela, A et B étant à la pression atmosphérique, on laisse A ouvert, on isole B et l'on y produit une dépression; on isole A de l'atmosphère,

([1]) *W. Ann.*, t. CLIX, 1876, p. 399.

et enfin l'on rétablit la communication entre A et B. Ce rapport a été 0,81 dans l'un des appareils.

Enfin, pour une expérience d'écoulement, on établit dans A et B une même pression faible, puis on ferme la communication directe, on augmente la dépression dans B, et l'on suit au manomètre M le rétablissement de l'égalité de pression par écoulement à travers le capillaire c.

Sous une atmosphère, avec une dépression de 15^{mm}, le passage de 200 divisions exige environ 1 minute; sous 45^{mm} de mercure, avec une dépression de 15^{mm}, il faut 8 minutes pour le passage de 100 divisions (3^{mm} de mercure).

L'inégalité des volumes A, B donne pour la loi de variation de la pression en fonction du temps une formule assez compliquée qu'il paraît inutile d'écrire ici.

Sous une pression moyenne de $33^{mm},8$ cinq expériences concordantes sur l'air ont donné pour le terme de correction de glissement $4\varepsilon : R = 0,045$ pour un tube de 151^{μ} de rayon, d'où l'on tire $4\varepsilon = 6^{\mu},7$. L'écart entre la viscosité calculée en négligeant le glissement, suivant qu'on opère à la pression atmosphérique ou sous 34^{mm}, atteint ainsi $\frac{1}{22}$.

Des mesures faites à 15° et à 100° sur l'air et l'hydrogène conduisent à un exposant $\frac{3}{4}$ pour l'air, et 0,62 pour l'hydrogène; mais il ne semble pas que les conditions de chauffage fussent très bonnes.

La loi du mouvement dans le tube est modifiée par le glissement, variable avec la pression. La vitesse longitudinale u à la paroi satisfait à la condition

$$u + \frac{\varepsilon_0 P_0}{p} \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \qquad r = R.$$

Lorsque, dans l'équation du n° **210**, on tient compte de la loi de variation de ε, on a

$$M = -\frac{\pi r_1^4}{8} \left[\int_0^l \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4\varepsilon_0 P_0}{r_1} \int_0^l \frac{\rho}{\mu} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \right]$$

ou

$$M = -\frac{\pi r_1^4}{8l} \left(\frac{\rho}{p}\right) \frac{1}{\mu} \left[\frac{p_0^2 - p_1^2}{2} + \frac{4\varepsilon_0 P_0}{r_1} (p_0 - p_1) \right].$$

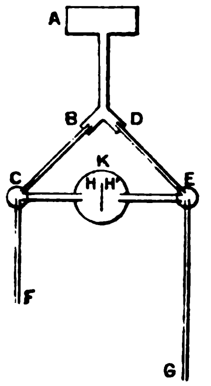
On en déduit que la pression moyenne à laquelle se rapporte le glissement moyen de la formule (1) est $\frac{p_0 + p_1}{2}$; Warburg adopte la valeur un peu plus petite $p_0^2 : (2p_0 - p_1)$ et cite, dans une Note (p. 401), les expressions détaillées des composantes de la vitesse du gaz suivant l'axe et suivant le rayon; la formule principale est malheureusement entachée de fautes d'impression.

220. Expériences de Cours. — Appareil. — On peut établir les propriétés fondamentales de la viscosité avec un appareil très simple, permettant de comparer les écoulements du gaz à travers différents tubes capillaires sous des différences de pression extrêmement faibles, de manière à pouvoir considérer comme constante la densité du gaz.

M. Élie a indiqué en quelques mots une adaptation du pont de Wheatstone à l'écoulement des gaz ([1]) que nous décrirons d'abord.

Cet appareil se compose d'un réservoir A (*fig.* 73) où l'on établit une pression un peu supérieure à celle de l'atmosphère. Deux tubes capillaires BC et DE identiques relient ce réservoir à deux vases

Fig. 73.



larges C et E. Les deux tubes à comparer sont CF et EG; à la suite du tube EG on dispose un *rhéostat*, c'est-à-dire un tube large dans lequel on peut enfoncer plus ou moins une baguette de verre, de manière à faire varier sa résistance; ce rhéostat s'ouvre dans l'atmosphère comme le tube F.

Enfin, deux tubes larges CH et EH' partent de C et E et aboutissent à un vase large K l'un en face de l'autre : entre les deux extrémités H et H', on a disposé une feuille d'or qui s'incline d'un côté ou de l'autre, plus ou moins, suivant la différence des pressions en C et E; la feuille d'or joue ici le rôle du galvanomètre. On manœuvre le rhéostat de manière que la feuille d'or reste verticale; la résistance du côté EG est alors égale à la résistance de CF.

On obtient beaucoup plus de précision en remplaçant la feuille d'or par un index liquide dans un tube en V très ouvert. L'appareil

([1]) *Journal de Physique*, 1882, p. 459.

est alors disposé comme l'indique la figure 74 (Leçons de février 1899 au Collège de France).

Le gaz est amené dans le vase A par un tube que ferme un robinet R. Avant le vase A est située une éprouvette contenant un desséchant (ponce sulfurique) et un manomètre M à acide sulfurique qui indique l'excès de pression du gaz, à son entrée, sur la pression atmosphérique.

Fig. 74.

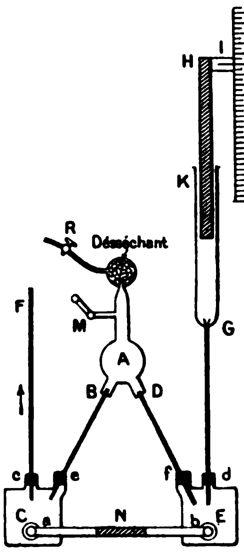
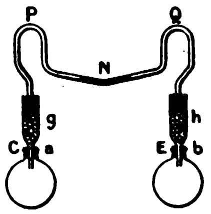


Fig. 74 *bis*.



Les tubes BC et DE aboutissent à deux flacons C et E à trois tubulures, couchés horizontalement de manière à éviter de courber les tubes BC et DE qui y aboutissent ainsi que les tubes CF et EG qui en partent.

Les troisièmes tubulures *a* et *b* sont reliées par un tube *a*PNQ*b*, dont le diamètre est de 5^{mm} environ, et dans lequel se meut la bulle liquide N qui sert à constater l'équilibre. Cette bulle est constituée par du xylol, et les vapeurs qu'elle peut émettre sont arrêtées par des desséchants placés en *g* et en *h*; la bulle a une dizaine de centimètres de longueur.

Pour les expériences de cours on peut se contenter de ce dispositif simple, et projeter l'image de la bulle. Pour des recherches, il est bon de construire ce manomètre différentiel en suivant les indications de Töpler, qui lui a donné une merveilleuse sensibilité [1].

[1] Töpler, *W. A.*, t. LVI, 1895, p. 609.

Soit $\mathcal{R}$ la résistance géométrique d'un tube,

$$\mathcal{R} = \frac{\pi r^4}{8 l}\left(1 + \frac{4\varepsilon}{r}\right);$$

l'équation d'équilibre du pont est

$$\frac{\mathcal{R}_1 \rho_1}{\mu_1} \times \frac{\mathcal{R}_4 \rho_4}{\mu_4} = \frac{\mathcal{R}_2 \rho_2}{\mu_2} \frac{\mathcal{R}_3 \rho_3}{\mu_3},$$

comme le montre facilement l'équation (I), n° **210**, appliquée aux faibles différences de pression relatives.

Un rhéostat est constitué par une baguette de charbon qui peut être enfoncée dans le tube large GK, et dont on lit la position le long d'une règle divisée L (n° **66**).

Le réglage de la baguette concentriquement au tube ayant paru difficile, on l'a laissée reposer le long de la génératrice inférieure.

221. Vérification de la loi de Poiseuille, pour les gaz s'écoulant dans un long tube capillaire sous une différence de pression très faible. — On a opéré sur le gaz d'éclairage; l'ouverture du robinet R permettait de régler la pression mesurée par le manomètre M.

Trois tubes A, B, C ont été employés. Leurs longueurs ont été choisies d'après leurs diamètres, de manière que leurs résistances, calculées en admettant la loi de Poiseuille, fussent à peu près égales. La sensibilité du rhéostat (par un choix convenable de la baguette) a été choisie de façon à permettre facilement d'équilibrer le pont avec ces trois tubes successivement placés en CF.

Eléments des tubes :

	Longueurs.	Carré du diamètre (par pesées au mercure).
	cm	cm^2
Tube A..........	90,4	3,0877
Tube B..........	36,65	1,989
Tube C..........	28,45	1,747

Les tubes B*e*, D*f*, E*g* étaient choisis de manière que leurs résistances fussent peu différentes de celles des tubes précédents.

Le rhéostat a été gradué par comparaison avec de petites longueurs additionnelles des tubes A, B, C, et l'on a trouvé:

1^{cm} du rhéostat vaut........... { 0,30 cm du tube A. / 0,13 du tube B. / 0,10 du tube C. }

La lecture des diverses positions du rhéostat qui équilibrent successivement A, B, C, sous une même pression motrice de 4^{mm} d'acide sulfurique, permet d'évaluer les longueurs exactes B′, C′ de tubes de même diamètre que B et C qui auraient exactement même résistance que A.

On a ainsi trouvé :

	Longueur.	Longueur L équivalente à A.	D^2 (par jaugeage).	D^4.	$\frac{D^4}{L}$.
		cm	cm		
A......	90,4	90,4	3,0877	9,534	1,055
B......	36,65	36,97	1,989	3,956	1,070
C......	28,45	28,65	1,747	3,052	1,065

La loi de Poiseuille, $\frac{D^4}{L} = \text{const.}$, pour des tubes équivalents au point de vue de la résistance qu'ils offrent à l'écoulement est donc vérifiée, pour les tubes employés, avec un écart maximum inférieur à $\frac{1}{70}$, sans qu'il ait été fait aucune correction d'ellipticité, de conicité des tubes, non plus que de perte de force vive à l'entrée.

L'influence du terme de force vive est facile à mettre en évidence avec cet appareil, car la position d'équilibre du rhéostat change avec le débit.

Pression motrice, en millimètres, d'acide sulfurique	Positions du rhéostat.
16	100,3
23	97,6
37	92,9
47,5	91,6

Il est également facile de mesurer directement la résistance d'un orifice en mince paroi.

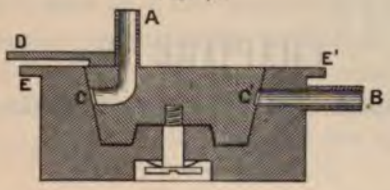
L'influence de la température est également facile à suivre et à mesurer.

Pour cela, l'un des tubes F est formé d'une partie large suivie d'un tube capillaire, le tout entouré d'un réchauffeur à circulation d'eau. L'autre tube se compose d'un tube D auquel on peut ajouter des longueurs de 5^{cm}, 10^{cm}, ..., 30^{cm} du même tube, par des joints en caoutchouc, et enfin le rhéostat. On équilibre le pont à diverses températures au moyen du rhéostat.

On mesure directement la valeur de $\frac{\mu}{\rho}$ ou $\mu\Theta$.

On a ainsi obtenu au cours (¹), pour l'air, entre 21° et 69°, une variation de viscosité proportionnelle à $(1 + 0,00273\, t)$.

Fig. 75.



Depuis lors, j'ai fait construire un rhéostat plus précis, entièrement en bronze (*fig.* 75). Il se compose d'un boisseau en bronze, creusé d'une cavité en tronc de cône dans laquelle tourne, comme un robinet, un tronc de cône *bien rodé* de 45^{mm} de diamètre, entouré d'une rainure CC′ haute de 5^{mm} et profonde de $0^{mm},5$. Cette rainure commence en C, où elle reçoit le gaz par le tube large AC placé dans un plan méridien du robinet, et l'amène jusqu'au tube de sortie B percé dans le boisseau; elle est interrompue par un remplissage de plus de 1^{cm} de longueur de l'autre côté du tube A. Le gaz n'a donc qu'un chemin disponible de A en B à travers la rainure; la longueur de ce chemin varie comme l'angle dont tourne le robinet. Le tour du robinet est divisé en 400 parties; le boisseau porte un repère. Par suite de la perfection du rodage, il a été nécessaire de mettre une vis de rappel pour entraîner avec douceur l'alidade D; on la fixe où l'on veut, le long du rebord EE′, au moyen d'une pince.

Des essais sommaires faits à la même époque m'ont montré que le pont se prêterait très bien à des mesures différentielles à haute température. Les deux branches Be, Df égales seraient maintenues, ainsi que le manomètre différentiel, à la température ambiante. Les deux branches cF, dG, formées de tubes de platine larges, prolongés par des tubes capillaires d'inégale longueur, seraient enfermés dans une même enceinte (four électrique ou bain d'air liquide), à température constante et uniforme; enfin, le plus court de ces tubes serait chauffé par un courant électrique auxiliaire jusqu'au rétablissement de l'équilibre du pont; et l'on mesurerait avec précision la différence de température des deux capillaires de platine, en les réunissant par un fil de platine rhodié pour en faire un couple thermoélectrique.

(¹) 18 février 1899.

CHAPITRE IV.

TUBES. — HAUTES TEMPÉRATURES.

A. — MESURES ABSOLUES.

222. Expériences de von Obermayer. — Air. — Le capitaine d'artillerie autrichien von Obermayer a publié, en 1875 et 1877, deux Mémoires importants sur la viscosité des gaz, entre —21° et 100° (1).

Dans le premier appareil, l'air puisé dans l'atmosphère traverse deux éprouvettes à chlorure de calcium, un tube rempli de coton, et arrive dans le bain réchauffeur, où il parcourt d'abord un tube large replié, puis le tube capillaire. De là, il arrive dans un grand ballon immergé dans un bain d'eau, où l'on a produit, au début de l'expérience, une dépression de quelques dixièmes d'atmosphère. La différence entre la pression de ce ballon et la pression atmosphérique est mesurée sur un manomètre à eau de 3^m de hauteur. La pression extérieure est lue sur un baromètre. On applique la formule de l'état variable (n° 213) aux lectures faites de 5 en 5 minutes.

Les mesures ont été faites aux températures de —21°,5 (6^{kg} de neige et 2^{kg} de sel), +52° (10^{kg} de paraffine fondue) et 100° (vapeur d'eau).

Malgré l'habileté et le soin de l'expérimentateur, les mesures furent d'abord peu concordantes; dans une même série, les écarts irréguliers ont atteint $\frac{1}{30}$ et jusqu'à $\frac{1}{20}$. La cause de ces irrégularités parait être dans l'impossibilité de régler avec une précision suffisante la température de l'air dans le ballon récepteur, dont le volume est considérable (75^l et 66^l); car une variation de température de 1° C. produit une dénivellation de 35^{mm} du manomètre à eau.

Une autre cause d'erreur, non discutée par M. Obermayer, provient

(1) *Carl Repertorium*, t. XII, p. 13 et 465, et t. XIII, p. 130.

des trop nombreux obstacles placés sur le trajet du gaz, tubes desséchants, tube à coton, tubes de plomb assez longs, robinets, dont la résistance totale n'était certainement pas négligeable.

La vitesse dans le tube était très grande, 2^m à 10^m par seconde, et l'on peut se demander si pendant le dixième de seconde que le gaz passait dans le tube capillaire sa détente le long du tube était isotherme ou adiabatique. La concordance des moyennes, lorsque la vitesse ne dépassait pas 5^m par seconde, semble indiquer une détente isotherme.

Première série. — Un premier groupe d'expériences, où le tube réchauffeur était manifestement trop court, a donné des coefficients de température variant entre 0,0024 et 0,0030. Un second groupe, avec un tube réchauffeur plus long, a donné 0,0028 entre — 21° et 15°, 0,0031 entre 15° et 53°. Toutes ces expériences ont été groupées en une seule série représentée par la formule

$$\mu = 0,0001706(1 + 0,002735\,\theta).$$

Deuxième série. — La difficulté des mesures par état variable a conduit à employer un mode d'aspiration un peu différent. Le ballon aspirateur, d'abord plein d'eau, est vidé par siphonnement sous hauteur réglable. On recueille l'eau quand l'état permanent est atteint, et l'on en déduit le débit. De très nombreuses expériences, dans lesquelles le coefficient de température a encore varié irrégulièrement entre 0,0026 et 0,0030, ont donné, en moyenne,

$$\mu = 0,00016747(1 + 0,002723\,\theta);$$

on peut encore mettre ces valeurs sous la forme

$$\mu = 0,00016775(1 + 0,003665\,\theta)^{0,7601},$$

les valeurs extrêmes de l'exposant n, fournies par les diverses séries, étant 0,733 et 0,810.

223. Gaz autres que l'air. — C'est surtout aux gaz autres que l'air qu'est consacré le deuxième Mémoire, ce qui a exigé quelques complications pour le remplissage, et l'addition d'un second manomètre.

Enfin, le chauffage au bain d'huile a permis d'atteindre 340° pour l'air, 245° pour l'acide carbonique et le chlorure d'éthyle. L'étanchéité de tout l'appareil était vérifiée journellement.

On jugera du degré de concordance des expériences par les résultats obtenus pour l'hydrogène avec divers tubes, entre 15° et 53° :

Rayon du tube.	μ_0.	Exposant n.
cm		
0,0138	0,00008612	0,731
0,0200	0,00008622	0,702
0,0196	0,00008644	0,687
0,0196	0,00008524	0,677

M. Obermayer en prend la moyenne et adopte

$$\mu = 0,000086055(1 + 0,0036650\,\theta)^{0,699}.$$

Les résultats de toutes ces expériences sont contenus dans le Tableau suivant (¹) :

$$\mu = \mu_0(1 + \beta\theta) = \mu_0(1 + \alpha\theta)^n.$$

Gaz.	$10^6\mu_0$.	$10^5\beta$.	$10^6\alpha$ adopté.	n.
Hydrogène.........	86,1	249	3665	0,699
Oxyde de carbone..	162,5	264	»	0,744
Azote..............	165,9	269	»	0,738
Air................	167,8	274	»	0,760
Oxygène...........	187,3	283	»	0,797
Acide carbonique...	138,3	348	3701	0,941 (0,950)
Protoxyde d'azote ..	135,3	345	3719	0,929 (0,943)
Éthylène...........	92,2	350	3665	0,958
Chlorure d'éthyle...	88,9	381	3900	0,977 (1,039)

La solubilité du chlorure d'éthyle dans l'eau a rendu les expériences plus difficiles; l'exposant n a paru croître avec la température.

Pour l'acide carbonique, la concordance à même température n'est pas bien bonne; néanmoins, l'exposant n paraît bien tomber à 0,87 ou 0,88 vers 200°.

En adoptant le coefficient de dilatation propre à chaque gaz, M. Obermayer a perdu de vue la signification de la formule; j'ai mis entre parenthèses l'exposant de la température absolue.

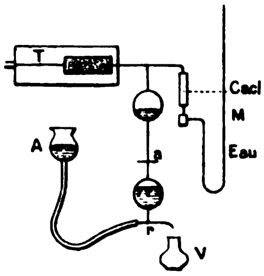
Sous cette forme, l'exposant n représenterait la loi de répulsion moléculaire en fonction de la distance, dans la théorie moléculaire des gaz; si cette répulsion s'exerçait sans chocs, elle serait proportionnelle à $r^{-\frac{2n+3}{2n-1}}$. Mais, dans ce cas, l'exposant n devrait être, pour

(¹) *Carl Repertorium*, t. XIII, p. 157.

un même gaz, indépendant de la température. Or, il semble bien, tant d'après les résultats relatifs à l'acide carbonique que d'après le classement du Tableau précédent, que l'exposant n doit être le même pour tous les gaz éloignés de leur point critique et croît à mesure qu'on se rapproche de la température critique, sous faible densité. Si l'exposant n n'est pas indépendant de la température, la forme $(1+\alpha\theta)^n$ n'a pas d'importance expérimentale et n'a plus d'intérêt théorique. D'ailleurs l'état gazeux parfait est trop bien représenté à l'aide de chocs purs, pour qu'on puisse songer à en faire abstraction et à les remplacer par une loi d'action à distance non suivie de choc. Il y aura lieu de revenir sur cette question à la fin du Volume.

224. Wiedemann. — A la suite de ses recherches sur la chaleur spécifique des gaz, E. Wiedemann ([1]) a étudié le frottement de quelques-uns d'entre eux par comparaison avec l'air aux températures de 8°, 100° et 184°,5 (aniline bouillante). Le gaz recueilli sur le mercure est chassé à travers un tube de verre rempli de tournure de cuivre et un tube capillaire plongés dans une étuve à température uniforme (*fig.* 76). L'écoulement est produit sous un excès de pression constant, lu sur un manomètre M, par le soulèvement d'un réservoir de mercure auxiliaire A. On met le compteur de temps en marche au

Fig. 76.



moment du passage du mercure au trait a marqué sur un tube étroit; au bout de quelques minutes, à une seconde juste, on ferme le robinet r. Achevant de tourner le robinet r, on laisse couler, dans un vase V, tout le mercure, jusqu'au trait a. La pesée donne le volume de gaz écoulé.

([1]) *Archives Sc. ph. nat. Genève*, t. LVI, 1876, p. 277.

En appliquant la formule d'écoulement permanent (n° 210), on obtient par comparaison avec l'air :

	8°.	100°.	184°,5.
Air..................	100	100	100
Oxyde de carbone....	96,87	»	96,42
Acide carbonique.....	80,5	85,63	87,50
Protoxyde d'azote....	80,5	85,82	87,94
Éthylène.............	56,24	60,02	61,93
Hydrogène...........	51,51	51,81	»

Tous ces nombres montrent que pour les gaz liquéfiables la viscosité croît avec la température plus rapidement que pour les gaz permanents (air, oxyde de carbone, hydrogène) et que, en outre, cet accroissement se ralentit quand la température s'élève.

Ce sens de variation est particulièrement manifeste en comparant les exposants n de la température H absolue dans les formules du type

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^n.$$

Les expériences donnent directement l'excès $n - n_{air}$:

	8-100.	8-184,5.	100-184,5.
Oxyde de carbone......	»	0,000	»
Acide carbonique.......	0,156	0,000	0,132
Protoxyde d'azote......	0,227	0,000	0,117
Éthylène...............	0,231	0,000	0,152
Hydrogène.............	0,000	0,000	»

Nous passerons sous silence les valeurs absolues indiquées par M. Wiedemann, en adoptant pour l'air une variation tout à fait incertaine et les considérations qu'il en tire sur la dissociation des gaz.

On peut douter que le réchauffement du gaz ait été complet aux températures élevées. Les excès $n - n_{air}$ sont sensiblement différents de ceux d'Obermayer (et moindres aux hautes températures). Le même réchauffeur avait donné à Wiedemann des *chaleurs spécifiques rapidement croissantes avec la température.*

225. Breitenbach. — Une installation analogue a été employée par Breitenbach au laboratoire de Wiedemann [1]; la marche de l'expérience est exactement la même; mais tout le montage a été plus étudié dans le détail. Presque tout l'appareil est en verre soudé, à

---

[1] *W. A.*, t. LXVII, 1899, p. 803.

part quelques jonctions en tube de plomb mastiqué. Le passage du mercure au niveau de repère dans le tube étroit est signalé par une sonnerie, qui sert aussi à indiquer le moment de la fermeture du robinet *r* lors du remplissage. Le réchauffement du gaz se fait sur un plus long parcours, dans des étuves de forme variée suivant la température. Le mélange de glace et sel, le bain d'eau, l'eau bouillante, l'aniline bouillante et la diphénylamine bouillante fournissent les points fixes -21°, 15°, 100°, 182°, 302°.

Toutes les mesures accessoires nécessaires pour les corrections ont été faites avec le plus grand soin. La concordance des mesures individuelles dépasse le $\frac{1}{200}$ et atteint souvent le $\frac{1}{500}$.

L'emploi de deux tubes de $0^{mm},1066$ et $0^{mm},1381$ de diamètre a permis de s'assurer que, sous la pression atmosphérique, le glissement de l'air correspond à une épaisseur de $0^{mm},0001$ environ. Ni le signe, ni la grandeur de cet effet ne sont douteux; il paraît sensiblement indépendant de la température (0° — 200°); mais on est bien près de la limite de précision des mesures de diamètre des tubes; on pourrait même se demander si cet excès du diamètre du cylindre en repos sur le diamètre des tubes n'est pas plutôt un excès du diamètre réel des tubes sur le diamètre de la colonne de mercure qui sert au jaugeage; mais l'adhérence du mercure pendant son écoulement s'oppose à cette interprétation; et surtout les mesures directes de Warburg et Kundt à basse pression ne laissent aucun doute sur la réalité du glissement et sa grandeur.

Résultats directs des observations en 10^{-7} C.G.S.

θ.	Air.	Éthylène.	Acide carbonique.	Hydrogène.	Chlorure de méthyle.
$-21^\circ,5$	1647	895	1301	823	(-15°,2) 941
15	1809	1011	1464	893-912	1057
99,1	2209	1282	1870	1087	1387
182,4	2559	1530	2241	1241	1706
302	2993	1826	2682	1422	2139

On en déduirait les valeurs suivantes de *n*, dans la formule en Θ^n, pour les intervalles successifs :

Air.	Éthylène	Acide carbonique.	Hydrogène.	Chlorure de méthyle.
0,6921	0,9014	0,8820	0,6202	1,0385
0,7783	0,9255	0,9450	0,6844	1,0601
0,7281	0,8770	0,8930	0,6577	1,0248
0,6707	0,7577	0,7651	0,5832	0,9687

Sur ce Tableau, on remarque que pour tous les gaz l'intervalle — 21°, 15° donne un résultat anormal; il en était de même dans les recherches d'Obermayer, il ne me paraît nullement probable que cette singularité soit réelle, mais bien plutôt que le mélange de glace et de neige ne refroidit pas le gaz suffisamment vite, et que la température du gaz est notablement supérieure à — 21°. Peut-être, comme le suggère M. Breitenbach, les gaz avaient-ils gardé une très petite quantité d'humidité malgré les soins apportés au dessèchement; si cette humidité s'était condensée dans le tube capillaire, elle en aurait augmenté la résistance, et la viscosité aurait paru trop grande pour la température. Quoi qu'il en soit, les valeurs relatives à — 21° sont douteuses.

Les valeurs de n ne sont pas très différentes de celles d'Obermayer.

Un peu plus tard, M. Breitenbach a montré que la formule de Sutherland

$$\mu = \mu_0 \frac{1 + C\alpha}{1 + \frac{C}{\theta}} \left(\frac{\theta}{273}\right)^{\frac{1}{2}}$$

représente très bien ses expériences avec les valeurs suivantes de la constante :

	μ_0.	$C_{Br.}$	$C_{Suth.}$ (Graham).	$C_{Rayl.}$
Air..................	0,0001733 1	119,4	113	111,3
Éthylène............	0,0000961 3	225,9	272	»
Acide carbonique.....	0,0001387 9	239,7	277	»
Hydrogène...........	0,0000857 4	71,7	79	72,2
Chlorure de méthyle.	0,0000988 6	454.0	»	»

Les deux dernières colonnes indiquent les valeurs de la constante de Sutherland C, obtenue par d'autres auteurs, d'après des expériences moins étendues.

226. Schultze. — Argon. — L'argon a été étudié d'abord sommairement par lord Rayleigh [1] qui a trouvé une viscosité égale à 1,21, celle de l'air à 15°, et un exposant de température égal à 0,815 dans des conditions qui n'assuraient pas complètement le réchauffement du gaz. L'intérêt qui s'attache à ce gaz, monoatomique comme la vapeur de mercure, a décidé le professeur Dorn à en faire faire une étude très soignée par M. H. Schultze [2].

---

[1] *Phil. Trans.*, t. CLXXXVI, 1895. — *Proc. R. Soc.*, 1900.

[2] *Dissert. inaug.*, Halle, 1901. — *Dr. Ann.*, t V, 1901, p. 146.

L'appareil employé par M. Schultze est celui de Breitenbach, doublé par reproduction symétrique de part et d'autre du capillaire, de manière à ne rien perdre du gaz à chaque opération et à le faire circuler alternativement dans un sens et dans l'autre. La plus grande partie de l'appareil est en verre; quelques jonctions aux manomètres sont faites par des tubes de plomb mastiqués à la gomme laque recouverte de cire à cacheter.

Les plus grandes précautions sont prises pour assurer la température exacte du gaz, qui parcourt $1^m,50$ de tube large dans l'étuve dans chaque sens avant d'atteindre le capillaire. Les expériences ont été faites à 15°, 100° et 183°.

La différence de pression est mesurée par un manomètre à mercure et eau; le mercure contenu à la partie inférieure dans deux réservoirs cylindriques larges est, d'un côté, en contact avec le gaz; de l'autre côté, il est surmonté par une haute colonne d'eau dont on lit le déplacement sur une échelle graduée en verre; l'extrémité du tube à eau est ouverte dans l'atmosphère par l'intermédiaire d'un tube à ponce aqueuse; l'air est ainsi constamment saturé, et l'étalonnage du micromètre se conserve.

Le tube capillaire, jaugé et calibré en détail, a une résistance $\sum \frac{l}{r^4}$ de 159863.10^8 par centimètre cube; il est assez long pour négliger la force vive.

L'appareil contient environ 400^{cm^3} de gaz. La manœuvre et le calcul de l'expérience sont les mêmes que dans Breitenbach.

Deux préparations d'argon ont été employées; dans l'une, l'analyse a révélé un résidu de $2\frac{1}{3}$ pour 100 environ d'azote; dans la seconde, $\frac{1}{2}$ pour 100 seulement.

Une formule à exposant unique ne représente pas les résultats aux trois températures d'observation. La formule de Sutherland

$$\mu = 0,0002104 \left(\frac{\theta}{273}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1 + 0,003665 . 169,9}{1 + \frac{169,9}{\theta}}$$

représente très bien les résultats :

$\theta - 273$.	14°,7.	99°,7.	183°,7.
μ_{obs}	0,0002208	2733	3224
μ_{Suth}	0,0002203	2741	3221

La correction de glissement, de l'ordre du centième, est faite en calculant le chemin moyen à la pression moyenne d'après la valeur de la viscosité.

B. — VISCOSITÉ DES GAZ A HAUTE TEMPÉRATURE.

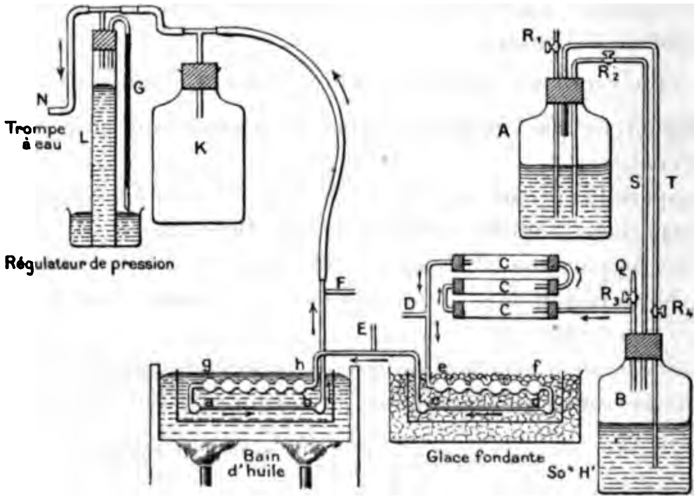
227. S. Holman. — Les premières expériences vraiment précises, étendues à un intervalle de 200°, sont celles qu'a effectuées Silas Holman, professeur à l'Institut technologique de Massachusetts, aux frais de l'*American Academy of Arts and Sciences* (1).

L'appareil (*fig.* 77) est entièrement en verre; les parties essentielles sont soudées entre elles et ne comportent aucun joint. Il est disposé de manière à éviter les mesures absolues.

Deux tubes capillaires à peu près identiques, *ab*, *cd*, sont placés l'un, d'une façon permanente, dans la glace fondante, l'autre, dans un double bain d'huile, chauffé par des becs de gaz et porté à une température θ que l'on peut faire varier à volonté.

On remplit d'abord la bouteille B, d'environ 10^l, avec de l'acide

Fig. 77.



sulfurique concentré; on la met en communication, par le tube Q, avec l'appareil producteur du gaz. On a fait au préalable le vide dans A; les robinets R_1 et R_2 étant fermés, on ouvre R_3 et R_4; l'acide sulfurique passe de B dans A par le tube T et est remplacé dans B

(1) *On the effect of temperature on the viscosity of air and carbon dioxyde* (*Proc. Am. Ac. A. Sc.*, 1876-1885; *Phil. Mag.*, 1877 et 1886, t. XXI, p. 199).

par le gaz qui arrive par Q. Quand B est rempli on ferme R_3 et R_4, on ouvre R_2 et l'on met la trompe en marche; l'écoulement se produit à travers les tubes capillaires, et l'acide sulfurique repasse de A dans B par le tube S qui forme siphon.

Le gaz qui sort de B passe dans une série de tubes desséchants C, C, C, pleins d'anhydride phosphorique, et traverse les tubes capillaires après avoir séjourné assez longtemps dans les tubes larges *ef*, *gh*, où il a bien pris la température du bain correspondant.

Avant de sortir de l'appareil, le gaz passe dans un grand vase K, puis dans un tube large L ouvert en bas et reposant sur une cuve à mercure; ce tube L communique en haut, d'une part avec la trompe, d'autre part avec un tube recourbé G qui affleure le mercure de la cuve.

L'ensemble des tubes L et G et de la bouteille K constitue un régulateur automatique de l'écoulement. Par l'aspiration de la trompe le vide se fait en L et en K et le mercure monte dans L; il baisse donc dans la cuve et découvre l'extrémité inférieure de G; de l'air entre par là, fait baisser le niveau de L et l'extrémité de G est de nouveau immergée dans le mercure de la cuve. Il y a donc dans le tube G un chapelet de gouttelettes de mercure séparées par de l'air, se déplaçant de bas en haut et produisant dans L une rentrée d'air qui régularise l'aspiration. Le niveau dans L se maintient constant et la pression dans K est ainsi bien définie.

Trois manomètres reliés respectivement à E, F, D donnaient les différences de pressions entre ces points et l'atmosphère; ces quantités, jointes à la hauteur barométrique, permettaient de calculer les pressions à l'entrée et à la sortie de chaque tube capillaire; ces quatre lectures étaient nécessaires, puisque les pressions interviennent dans les formules par les différences de leurs carrés.

Les thermomètres ont été comparés au thermomètre à air, au moyen d'appareils dus à Rowland, et dans son laboratoire (¹).

228. Formule. — Appelons :

P_1, la pression en D, laquelle est égale à la pression en *f*, c'est-à-dire à l'entrée du tube capillaire *cd*;

P_2, la pression en E; c'est la pression à la sortie du tube précédent et à l'entrée du deuxième capillaire;

(¹) HOLMAN, *Proc. Am. Ac.*, t. XXI, 1885. — ROWLAND, t. XV, 1879.

P_3, pression en F (sortie du deuxième capillaire);
l et r, la longueur et le rayon à o° du premier capillaire (cd);
l' et r', les mêmes quantités à θ° pour le second (ab).

On a, en supposant négligeable le terme dépendant du carré de [illegible] vitesse :

$$P_1^2 - P_2^2 = \frac{16\, l}{\pi r^4 \left(1 + 4\frac{\varepsilon}{r}\right)}\, I \left(\frac{p}{\rho}\right)_0 \mu_0 = K I \mu_0,$$

$$P_2^2 - P_3^2 = \frac{16\, l'}{\pi r'^4 \left(1 + 4\frac{\varepsilon}{r'}\right)}\, I \left(\frac{p}{\rho}\right)_\theta \mu_\theta = \frac{K' I}{1 + 3\delta\theta}\, \mu_\theta (1 + \alpha\theta).$$

Dans ces formules :

θ représente la température du bain d'huile où est plongé le deuxième capillaire;
δ le coefficient de dilatation linéaire du verre;
α le coefficient de dilatation moyen des gaz entre o° et θ° à la pression P_2;
I le débit (en masse) commun des deux tubes capillaires.

Les quantités K et K′ sont des constantes qui ne dépendent ni du gaz ni de sa température; elles dépendent seulement des dimensions des tubes.

Les deux formules précédentes donnent, en divisant membre à membre :

$$\frac{P_2^2 - P_3^2}{P_1^2 - P_2^2} = \frac{K'}{K}\, \frac{\mu_\theta}{\mu_0}\, \frac{1 + \alpha\theta}{1 + 3\delta\theta}.$$

Le rapport $\frac{\mu_\theta}{\mu_0}$ ne dépend donc que des pressions et de la température, mais non des dimensions absolues des tubes qu'il est inutile de connaître.

Remarques. — On voit que l'effet de la température est non seulement de faire varier $\left(\frac{\mu_\theta}{\mu_0}\right)$, mais encore le terme connu :

$$\frac{1 + \alpha\theta}{1 + 3\delta\theta}.$$

Les variations de pression mesurées tiennent donc à ces deux causes et l'effet de la première $\left(\frac{\mu_\theta}{\mu_0}\right)$, qui seule intéresse, est de même ordre que l'autre. Une grande précision est donc nécessaire.

Le rapport $\frac{K'}{K}$ est voisin de 1, les deux capillaires étant presque identiques. Holman mesurait ce rapport en plongeant les deux tubes dans la glace fondante.

Les erreurs qui séparément donneraient une erreur relative de 0,001 sur le rapport $\mu_\theta : \mu_0$ sont les suivantes :

Sur $\frac{K'}{K}$, une erreur relative de 0,001. Les expériences de comparaison dans la glace fondante devront être l'objet de soins minutieux.

Sur δ, une erreur relative de 0,4 à 100°, ou de 0,2 à 225°. Facile à éviter; la mesure entre 0° et 100° a été faite directement sur le tube employé.

Sur α, une erreur relative de 0,004 à 100°, de 0,0022 à 225°. Il suffit de prendre le coefficient de dilatation du gaz mesuré par Regnault, et pour CO_2 de le ramener à la pression p_2.

Sur t, une erreur de 0°,33 à 50° ou de 0°,50 à 225°. Les trois thermomètres, un de Casella, deux autres de Baudin, ont été comparés au thermomètre à air, et l'on a fait toutes les corrections nécessaires.

Sur p. Le cathétomètre a été contrôlé. Le mercure, distillé, est le même pour les mesures à toutes les températures, y compris la détermination de $K' : K$; son influence s'élimine donc.

Les tubes de jonction sont assez larges pour ne pas causer un centième de millimètre de dépression.

Humidité. — L'appareil entier est desséché au début de chaque jour par des vides répétés alternant avec des circulations de gaz secs. Le gaz séjourne 15 minutes sur l'acide sulfurique; il met 15 minutes à traverser les tubes desséchants.

Fuites. — Les joints des tubes de caoutchouc sont entourés de glycérine.

Température du gaz. — Les tubes à boules sont assez gros pour que le gaz mette 15 minutes à les traverser.

229. Expériences sur le gaz carbonique. — Le gaz était préparé par action de l'acide chlorhydrique sur le marbre; il était soigneusement desséché et débarrassé de vapeurs acides.

Holman a fait 98 mesures réparties sur plusieurs années.

1° Les 38 premières, obtenues en plongeant les deux tubes dans la glace fondante, étaient destinées à donner le rapport $\frac{K'}{K}$.

Ces 38 mesures se répartissent en quatre groupes. Voici les résultats généraux :

	Valeur moyenne de $\frac{K'}{K}$.	Valeur maximum.	Valeur minimum.
1er groupe (13 mesures).......	1,0440	1,0918	1,0169
2e groupe (6 mesures)........	1,0375	1,0510	1,0276
3e groupe (6 mesures)........	1,0395	1,0402	1,0376
4e groupe (12 mesures).......	1,0380	1,0419	1,0335

Les progrès de la technique sont manifestes; les écarts qui, dans le premier groupe, atteignent $\frac{1}{30}$ deviennent moindres que $\frac{1}{100}$ dans les groupes suivants. Dans ses expériences définitives, Holman pense pouvoir compter sur le $\frac{1}{500}$.

2° Les 60 autres mesures se rapportent à des échauffements du deuxième capillaire.

La température du bain d'huile pouvait être maintenue constante à $\frac{1}{2}$ degré près; ce bain était constamment agité à l'aide d'un moulinet à ailettes.

La température du bain d'huile a été successivement portée aux valeurs moyennes suivantes :

18°,1; 40°,98; 59°,14; 79°,65; 100°,17;
119°,30; 141°,983; 158°,283; 181°,32; 224°,0; 17°,07

Les résultats sont bien représentés par la formule :

$$\frac{\mu_\theta}{\mu_0} = 1 + 0,0037250\,\theta - 0,0000002640\,\theta^2 + 0,00000000417\,\theta^3.$$

Les nombres mesurés et ceux qu'on calcule par cette formule concordent à $\frac{1}{200}$ au moins.

230. **Expériences sur l'air.** — Les limites de température ont été moins étendues que pour CO^2; Holman n'a pas dépassé 125°.

Des tubes de diverses formes furent d'abord employés (tubes en hélice, etc.); les résultats se montrèrent très irréguliers; les expériences définitives furent faites avec des tubes droits (deux séries de mesures).

Une première série est bien représentée par la formule

$$\mu_\theta = \mu_0\,(1 + 0,0028210\,\theta - 0,00000149\,\theta^2),$$

entre 0° et 100°.

Une deuxième série (0°-125°) a fourni la formule

$$\frac{\mu_\theta}{\mu_0} = (1 + 0{,}0027510\,\theta - 0{,}00000034\,\theta^2).$$

Cette dernière formule concorde avec les nombres observés à $\frac{1}{3000}$ jusqu'à 100°. Mais une mesure faite à 125° donne un résultat qui s'en écarte sensiblement. Ce désaccord coïncidant avec un changement de thermomètre on n'en tint pas compte.

En comparant ces deux formules, on voit que le coefficient de θ est assez bien déterminé; il est voisin de 0,00280. Le coefficient de θ^2 est mauvais comme toujours; cependant il est très faible, la courbure n'est donc pas bien accentuée. De plus, le sens de la courbure est certain; dans les deux cas le signe du coefficient est négatif.

231. Comparaison des résultats obtenus par les divers expérimentateurs, sur l'air et CO^2. — Pour aucun de ces deux gaz la loi de variation des coefficients de viscosité avec la température n'est représentée par une formule linéaire telle que

$$\mu_\theta = \mu_0(1 + b\theta), \tag{1}$$

où b serait une constante.

Cependant, les écarts entre une loi linéaire et la loi expérimentale sont extrêmement faibles et peu sensibles entre 0° et 50°.

Pour comparer les résultats des divers auteurs sur la question, Holman a tracé les courbes des excès

$$\mu_\theta - \mu_0\left(1 + \frac{\theta}{400}\right) \quad \text{pour l'air} \quad (\textit{fig. } 78),$$

$$\mu_\theta - \mu_0\left(1 + \frac{\theta}{300}\right) \quad \text{pour } CO^2 \quad (\textit{fig. } 79),$$

obtenus par les expérimentateurs précédents.

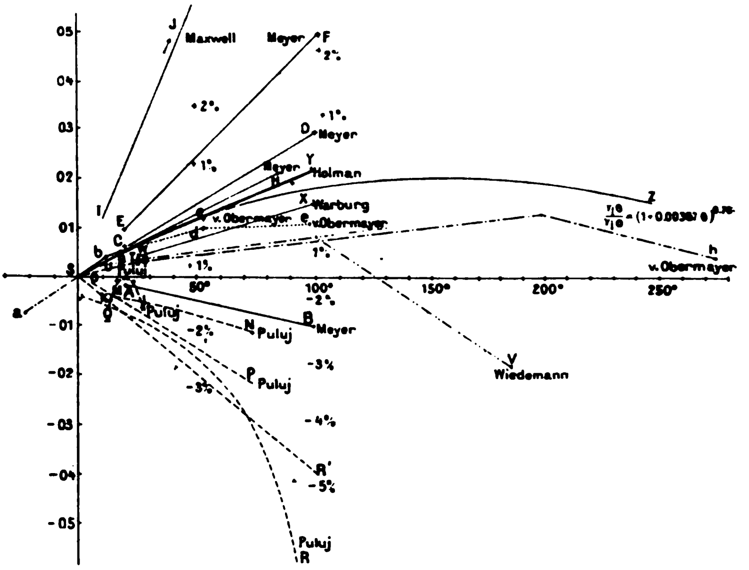
On voit que pour l'air, entre 0° et 100°, les bonnes expériences (Holman, Warburg, Obermayer) concordent entre elles et avec la courbe

$$\mu_\theta = \mu_0(1 + \alpha\theta)^{0,76} \qquad (\alpha = 0{,}00367).$$

Les abaissements trop rapides des courbes au delà de 100° tiennent sans doute à de mauvaises conditions expérimentales (mauvais réchauffements du gaz avant l'entrée dans le capillaire).

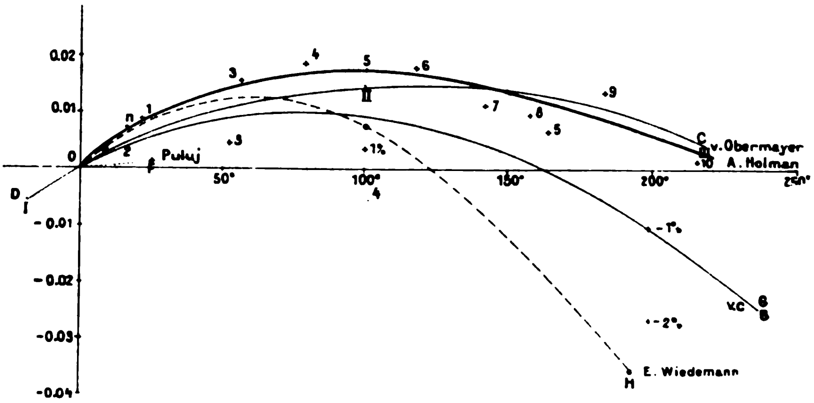
Il en est de même pour CO^2; l'accord avec la formule de Holman est bon jusqu'à 100°.

Fig. 78.



En résumé, jusqu'à 100°, les résultats semblent définitivement acquis et connus au $\frac{1}{200}$.

Fig. 79.



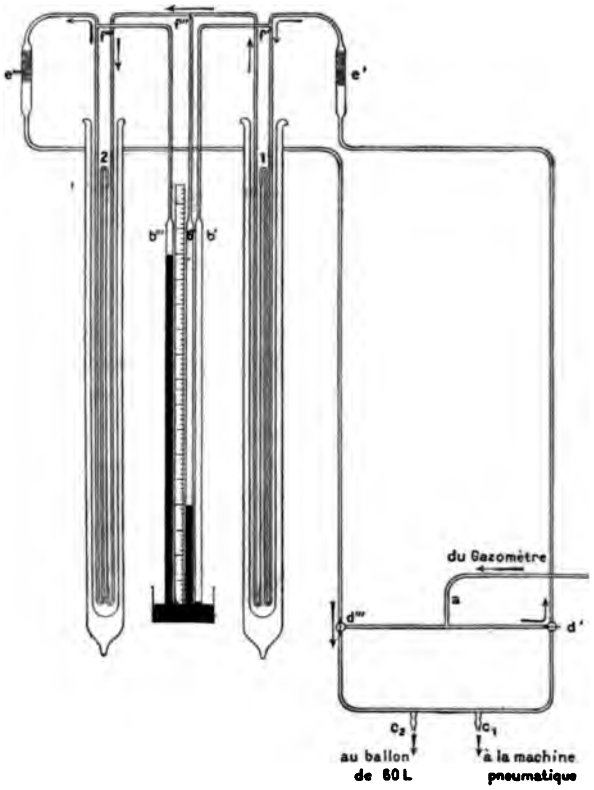
232. Viscosité de l'azote chimique. — **Bestelmeyer** (¹). — La méthode comparative de Holman a été appliquée récemment à l'azote par

(¹) *Dr. Ann.*, t. XIII, 1904, p. 944.

M. Bestelmeyer avec des précautions minutieuses, dans un intervalle de température de 500°, depuis — 190° obtenu avec l'air liquide, — 70° par le mélange de neige carbonique et d'alcool, jusqu'à + 300° dans la vapeur de diphénylamine bouillante.

La disposition générale de l'appareil employé aux basses températures est indiquée par la figure 80. Le tube c_1 est relié à la trompe à

Fig. 80.



mercure; le tube c_2 à un ballon vide de 60^l, le tube a communique à un gazomètre à cloche équilibrée sur cuvette de mercure, d'une capacité de $\frac{3}{4}$ de litre qui fournit le gaz à la pression atmosphérique; les robinets d', d'' permettent de renverser le sens de parcours des tubes capillaires (1), (2); les tampons de ouate e', e'' arrêtent toute trace de poussière. Les trois baromètres manométriques b', b'', b''' sont placés côte à côte.

Une étude préliminaire approfondie dont on trouvera le détail dans la dissertation inaugurale (Munich, 1903) a permis de préciser les

conditions pour que l'état permanent s'établisse assez rapidement, et de corriger des petites variations qui surviennent encore pendant la durée de l'expérience. En choisissant les tubes pas trop résistants, et surtout en réduisant le plus possible le volume compris entre les deux tubes, par l'emploi de tubes de jonction de $0^{cm},22$ de diamètre intérieur, le temps nécessaire pour que sous une pression totale de 1^{atm} l'équilibre soit atteint à $0^{mm},1$ de mercure est compris entre 20 minutes dans l'air liquide et 2 heures à 300°. La formule de calcul est

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^4 \frac{l_1}{l_2} \frac{p''^2 - p'''^2}{p'^2 - p''^2} \frac{1 + \alpha\theta_1}{1 + \alpha\theta_2} \frac{1 + 3\beta\theta_2}{1 + 3\beta\theta_1} \frac{1 + 4G_2 : R_2}{1 + 4G_1 : R_1}(1 + \Delta),$$

dans laquelle α est $1 : 273,04$; β est le coefficient de dilatation du verre des tubes; G est le glissement

$$G = 0,000\,0086 \frac{76}{p} \frac{\mu\sqrt{1 + \alpha\theta}}{\mu_0},$$

en désignant par p la pression moyenne dans le tube en centimètres de mercure, dont la température est θ, et μ une valeur approchée de la viscosité; ce dernier facteur représente la variation du chemin moyen en fonction de la température, à laquelle G est proportionnelle. Comme le second tube est parcouru sous une très basse pression, la correction de glissement n'est pas négligeable; elle atteint $\frac{1}{200}$ dans l'air liquide. Δ est un terme de correction pour la variation de pression entre le début et la fin de l'expérience; il est resté inférieur à $\frac{1}{500}$.

Les tubes capillaires ont chacun 80^{cm} de longueur; les rayons moyens, déduits de jaugeages et de calibrages extrêmement soignés, sont

$$R_1 = 0^{cm},008553, \qquad R_2 = 0^{cm},008372,$$

et donnent

$$\frac{R_1^4 l_2}{R_2^4 l_1} = 1,1045 \quad \text{et} \quad 1,1034$$

après la fin des expériences. D'autre part, les expériences d'écoulement de l'air à la même température, celle de la chambre, maintenue identique pour les deux tubes au moyen d'un appareil particulier de circulation d'eau, ont donné le rapport 1,0986. Cet écart de $\frac{1}{200}$ entre les deux valeurs est resté inexplicable.

La force vive, dont il n'a pas été tenu compte par l'auteur, ne donne rien de sensible; le débit que les données permettent de calculer est de l'ordre de $0,3.10^{-4}$ gramme par seconde; la force vive n'augmente la résistance que de 10^{-4} de sa valeur. Ce qui me paraît

le plus probable, c'est que sous ces fortes chutes de pression l'approximation du calcul de O.-E. Meyer n'est plus suffisante.

Quoi qu'il en soit, c'est le rapport observé 1,0986 qui a servi au calcul des expériences.

Aux très basses températures, l'azote s'écarte sensiblement de la loi de Mariotte, d'après des expériences de MM. Bestelmeyer et Valentiner, suivant la formule

$$p = \rho[(0,27774 + 0,000253\,p)(273,04 + \theta) - 0,03202\,p],$$

où p est mesuré en centimètres de mercure, et ρ est rapporté à la densité de l'azote à 0°, 76cm.

D'après la théorie, l'expression $\frac{p''^2 - p'''^2}{p'^2 - p''^2}\,\frac{1+\alpha\theta_1}{1+\alpha\theta_2}$ doit alors être remplacée par $\left(\int_{p'''}^{p''} \rho\,dp\right)_{\theta_2} : \left(\int_{p''}^{p'} \rho\,dp\right)_{\theta_1}$, calculable numériquement au moyen de la formule ci-dessus. Il en résulte une correction d'environ 0,0044 dans l'air liquide.

La détermination des températures au moyen d'une résistance de platine a été l'objet de soins particuliers.

La discussion de chacune des erreurs capables d'entraîner une erreur finale de 0,001 est résumée dans deux Tableaux très instructifs (p. 988).

Les résultats sont admirablement représentés par la formule de Sutherland

$$\mu = \mu_0 \frac{(273 + \theta)^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{C}{(273 + \theta)}}.$$

Chaque expérience donne $\mu : \mu_{17^\circ}$ et détermine une valeur de C :

θ.............	$-190°,63$	$-78°,66$	$+98°,4$	$+300°,4$
C.............	103,6	110,6	114,4	110,3

Dans l'air liquide, on retrouverait C = 110, si l'on pouvait admettre que la température soit $-190°,1$, mais il est probable que la température approchait plutôt de $-190°,73$. On voit l'importance de la détermination très précise de la température.

Adoptant C = 110,6, on obtient :

θ.............	$-190°,63$	$-78°,66$	$+98°,4$	$+300°,4$
$\frac{\mu}{\mu_{17}}$ observé....	0,3204	0,7207	1,2064	1,6279
$\frac{\mu}{\mu_{17}}$ (Suth.)....	0,3144	0,7207	1,2045	1,6283

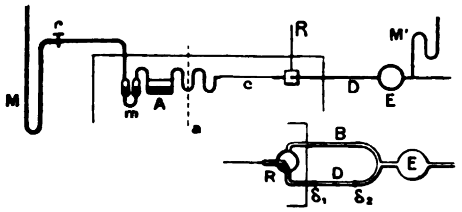
C'est une confirmation éclatante de la formule de Sutherland, surtout si l'on songe qu'elle suppose l'état gazeux parfait, ce qui, à la température de l'air liquide, au-dessous du point critique de l'azote, n'est plus très bien réalisé même à la pression atmosphérique et produit probablement le petit écart équivalent à 0°,6 sur la température.

C. — VAPEURS.

233. Vapeurs de mercure. — S. Koch (¹). — La variation de la viscosité de la vapeur de mercure, qui est monoatomique tant au point de vue chimique que d'après le rapport de ses chaleurs spécifiques, présente un intérêt particulier; elle permet de décider si les écarts de la loi déduite du choc pur tiennent à ce que les gaz étudiés sont diatomiques, et par conséquent mal représentés par une boule sphérique, ou si c'est surtout la réduction de la rencontre à un choc qui est une simplification excessive aux températures inférieures au point critique. Dans le premier cas, la viscosité de la vapeur de mercure doit varier comme $\theta^{\frac{1}{2}}$ sensiblement; dans le second cas, elle doit s'en écarter beaucoup plus que les autres gaz déjà étudiés. Ces considérations ont décidé Warburg à faire étudier cette vapeur par S. Koch; c'est le second cas qui se produit.

L'appareil employé se compose du petit manomètre auxiliaire *m*, du réservoir à mercure A, du tube capillaire *c*, et du robinet R, à

Fig. 81.



double direction, enfermés dans l'étuve à circulation des gaz de la flamme déjà décrite (n° 134, *fig.* 31). La tige du robinet R sort de l'étuve; faute de longueur, l'appareil est replié en α; des fenêtres garnies de mica permettent de voir le manomètre *m* dans l'étuve.

(¹) *W. Ann.*, t. XIX, 1883, p. 857.

Hors de l'étuve, on trouve d'un côté le manomètre M à air libre; de l'autre côté, les deux tubes B et D en relation avec la boule E, le baromètre tronqué M' et la pompe à mercure.

Dans l'étuve se trouve en outre un thermorégulateur métallique qui règle la température à 1° près, et un thermomètre à air de Jolly.

L'appareil d'écoulement est entièrement en verre; les joints rodés δ_1, δ_2 du tube D tiennent à sec; il en est de même du robinet R, dont le fonctionnement reste bon dans l'étuve à 400°.

Le robinet R est d'abord tourné de manière à mettre le capillaire *c* en communication avec le tube B. On fait le vide à chaud de manière à enlever tout l'air de l'appareil jusqu'au manomètre *m*; et, par le robinet *r*, on introduit ou l'on enlève de l'air dans l'espace compris entre *m* et M, de manière qu'à la température adoptée toute la dénivellation se produise dans M. Au bout d'une heure environ, on commence la mesure de l'écoulement en tournant le robinet R vers D. Le mercure qui a traversé le tube capillaire vient se condenser en totalité dans le tube D, exposé à l'air, un peu au delà du point δ_1. Un observateur note le temps, lit régulièrement la température et la pression en M, en s'assurant qu'il n'y a pas de différence de niveau sensible en *m*, pendant qu'un aide entretient la dépression M' constante en manœuvrant la pompe à mercure.

Au bout d'une demi-heure environ le poids de mercure distillé en D est devenu suffisant pour la pesée (20^{mg} à 200^{mg}, suivant la température). On tourne le robinet R, on détache le tube D de ses rodages et l'on pèse.

Le calcul complet de l'expérience n'exige plus que la connaissance de la densité de la vapeur de mercure par rapport à l'air, 6,978 d'après Dumas.

Trois tubes capillaires ont été employés :

l	$9^{cm},875$	19,22	18,0
R	$0^{cm},0042456$	0,00593	0,008238

Entre 270° et 380°, les résultats sont bien représentés par la formule

$$\mu = 0,000067 + 0,000001\,55\,\theta$$

ou encore par la formule

$$\mu = 0,000\,162(1 + \alpha\theta)^{1,60}.$$

Deuxième tube.

θ..............	273	313	369	380
μ_0 observé......	0,000494	551	641	654
μ_c calculé.......	0,000492	552	639	656

La grandeur 1,6 de l'exposant ne laisse aucun doute; c'est le choc qui doit être remplacé par une rencontre.

Le volume moléculaire qui en résulte est égal à 4,39 fois celui de l'hydrogène à la même température de 300°; ce rapport devient 12,9 à 0°.

Enfin, de la densité de vapeur à 300°, 314.10^{-6} de celle du mercure liquide, et de la viscosité, il résulte que le diamètre moléculaire est sensiblement 42.10^{-9} centimètre.

234. Vapeurs organiques. — L. Meyer [1]. — La mesure de la viscosité des vapeurs de liquides dont le point d'ébullition est élevé présente de grandes difficultés; mais la relation que la théorie cinétique établit entre la viscosité et le diamètre moléculaire donne un grand intérêt à ces mesures, puisqu'elles équivalent alors à des mesures de volume moléculaire; à un facteur numérique près, le même pour toutes les substances, le volume moléculaire est mesuré par $\left[\frac{\varpi(1+\alpha\theta)}{\mu^2}\right]^{\frac{3}{4}}$ en appelant ϖ le poids moléculaire. C'est cette considération qui a décidé L. Meyer à effectuer des mesures sur la benzine et un grand nombre d'éthers, après avoir reconnu l'accord entre les volumes moléculaires déduits des viscosités de Graham et ceux directement mesurés par Kopp.

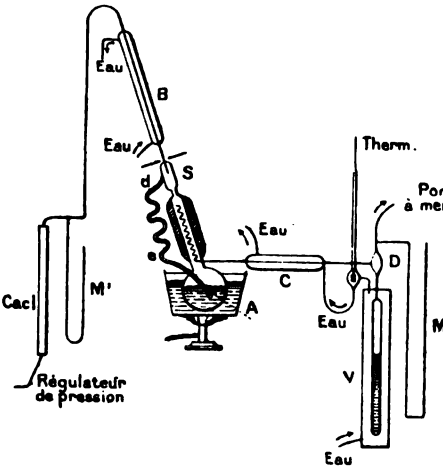
La mise au point de l'expérience a été extrêmement difficile. Après plusieurs tentatives infructueuses pour la régulation de la température, Meyer a dû se décider à opérer avec de la vapeur d'abord saturante qui se détend dans le tube capillaire à la température même de l'ébullition. La partie délicate et fragile de l'appareil est le bouilleur qui enferme le serpentin capillaire, entièrement construit en verre par Geissler (*fig.* 82). Ce serpentin, d'une longueur totale de 150^{cm}, a 30 spires; sa hauteur est de 14^{cm} et son diamètre extérieur $1^{cm},8$. Le ballon A qui contient le liquide est chauffé au bain-marie; la vapeur s'élève autour du serpentin capillaire *aa*, sort en soulevant une

(1) *Wied. Ann.*, t. VII, 1879, p. 497.

soupape de verre S, se condense dans un réfrigérant B et redescend par le tube *de*. La seconde forme est moins fragile; la jonction avec le ballon est faite au moyen d'un très bon bouchon de liège. Pendant l'expérience, tout le tube qui contient le serpentin est entouré de ouate.

Au bout d'une demi-heure d'ébullition environ, l'air est chassé du bouilleur; on vide l'air du reste de l'appareil par quelques coups

Fig. 82.



de pompe à mercure. Alors la vapeur commence à s'écouler à travers le serpentin capillaire; elle arrive dans le premier réfrigérant C et s'y condense, arrive à l'ampoule D, et, grâce à une petite lame de platine, s'écoule d'une manière continue dans la burette graduée V de 50^{cm^3}. Le même courant d'eau froide remonte le long de la burette, contourne un thermomètre et circule dans le condenseur C. D'ordinaire, il circule ensuite dans le réfrigérant B. Lorsque l'état de régime est atteint, au bout de 10 minutes environ, on commence les lectures de débit dans la burette V, observée avec un cathétomètre à des époques régulières et bien déterminées, de 10 en 10 minutes, puis toutes les demi-heures pendant 5 ou 6 heures consécutives. La tension de la vapeur dans la burette est mesurée par le manomètre M et le baromètre. La température du liquide condensé est celle de l'eau qui circule autour de la burette; on en déduit la densité du liquide condensé et, d'après les volumes lus sur la burette, les débits en poids.

Lorsque le régime régulier est établi, la pression à l'entrée dans le tube capillaire est égale à la pression dans le bouilleur. Cette pres-

sion est égale à celle qu'indique le manomètre M′ comparé au baromètre, augmentée de la pression due au poids de la soupape de verre S; on évalue cette dernière d'après la hauteur de liquide soulevé dans le tube *ed*, au-dessus du niveau général dans le ballon A, environ 50^{mm}, et d'après la densité du liquide grossièrement connue. De cette pression on déduit la température d'ébullition pour les liquides qu'a étudiés Regnault. Le bain d'eau ou de chlorure de calcium est maintenu automatiquement à niveau constant et bien mélangé.

Lorsqu'on veut obtenir l'ébullition sous une pression inférieure à 1 atmosphère, on emploie un régulateur de pression (¹) qui fonctionne avec une trompe à eau; pour les pressions supérieures à 1 atmosphère, le régulateur fonctionne avec un appareil à dégagement d'acide carbonique.

Pour éviter les condensations dans le manomètre M, on est quelquefois obligé de l'entourer d'une feuille mince de clinquant, dont un bout recourbé est chauffé par une petite lampe.

M. L. Meyer a essayé de mesurer son serpentin capillaire et de le jauger; la mesure, tout à fait incertaine, est celle de la longueur, 150^{cm} environ, du tube, car elle est évaluée d'après la longueur extérieure et la longueur intérieure de l'hélice, en supposant le trou central; la section, $9.10^{-4\,cm^2}$ environ, déduite du volume jaugé au mercure et de la longueur, participe de la même incertitude.

Pour lever la difficulté, M. Meyer a fait écouler de l'air à travers le tube, sous une différence de pression analogue à celle qu'il employait avec les vapeurs, 71^{cm} de mercure environ. Son jaugeage le conduisait à une viscosité de l'air supérieure de $\frac{1}{20}$ environ à la moyenne de celle des autres observateurs; il faut évidemment adopter l'étalonnage par écoulement d'air et laisser de côté les mesures géométriques directes trop incertaines.

Pour le calcul de ses expériences, M. L. Meyer a adopté la formule de O.-E. Meyer valable pour les gaz parfaits; il admet donc que la vapeur étudiée se détend à la température d'ébullition θ en suivant la loi de Mariotte, à partir de l'état saturant (²); pour le facteur $\left(\frac{\rho}{p}\right)$, on prend la valeur relative à l'air multipliée par la densité de vapeur

(¹) Lothar Meyer, *Ann. Liebig*, t. CLXV, 1873.

(²) C'est à cela que revient le mode de calcul de M. L. Meyer, qui admet la loi des gaz comme valable, jusqu'à 20° au-dessus de la température d'ébullition, puis attribue le coefficient de dilatation 0,004 à cet intervalle de 20° restant.

théorique déduite du poids moléculaire, multipliée par

$$\frac{1+0,004(\theta+20)}{1+0,003665(\theta+20)}\times\frac{1}{1+0,004\,\theta}.$$

Ces hypothèses paraissent suffisantes dans des expériences dont la précision ne peut pas être très grande. M. L. Meyer évalue à 1^{mm} de mercure l'incertitude sur la pression.

Avec d'aussi grandes pressions motrices, nous pourrions craindre que la force vive ne soit pas négligeable; mais à l'époque du Mémoire de M. Meyer on n'y avait pas encore pensé.

La formule II (n° 210) donne pour le rapport du terme de force vive au terme de viscosité $\frac{2M}{16\pi\mu l}$.

Pour l'air, le débit a été d'environ $0,6.10^{-3}$ grammes par seconde, ce qui donne

$$\frac{2M}{16\pi\mu l}=\frac{1,2.10^{-3}}{16\pi.180.10^{-6}.150}=0,9.10^{-3}.$$

Pour la benzine, le débit a atteint $1^{mg},5$ par seconde; l'erreur qui en résulte n'atteint pas 2.10^{-3}, car la viscosité est un peu moindre que celle de l'air. Cela est sans conséquence. En revanche, l'emploi d'une très faible pression finale a l'avantage d'augmenter l'importance de l'écoulement sous faible densité, conforme à la loi de Mariotte, par rapport à l'écoulement initial sous densité saturante, comme on peut voir d'après les résultats du Tableau suivant, où sont inscrites les viscosités obtenues pour diverses valeurs de la pression p_1 dans la burette, convenablement réchauffée.

$\left(\begin{array}{c}85°,5\\ p_0=89^{cm}\end{array}\right)$	p_1	8^{mm}	25	50	68
	μ	0,000157	152	143	139

Pour la benzine, $C^6H^6(=77,82)$, seule étudiée dans ce premier Mémoire, les résultats sont résumés dans le Tableau suivant :

Température.	Viscosité.	Volume moléculaire.
85°,5	0,000156	50,1
82,5	151	»
80,4	144	57,4
79,4	142	»
78,6	141	»
77,7	138	»
72,2	127	68,5

Le volume moléculaire varie d'environ 1,2 par degré. Les observations de Puluj au moyen des disques avaient donné une viscosité de 0,000076 à 17°, et un volume moléculaire correspondant à 127, d'où une variation d'environ 1 par degré entre 17° et 72°.

Le volume moléculaire V a été calculé au moyen de la formule

$$\frac{V}{43,9} = \left(\frac{\varpi}{63,9}\,\frac{1+\alpha\theta}{1+\alpha.15°,8}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{138.10^{-6}}{\mu}\right)^{\frac{3}{2}},$$

par comparaison avec l'acide sulfureux ($\varpi_0 = 63,9$, $\mu_0 = 138.10^{-6}$ à 15°,8), dont le volume moléculaire a été regardé comme égal à son volume liquide 43,9.

Cette variabilité du volume moléculaire avec la température doit être interprétée comme pour les gaz, conformément aux vues de Stefan (1) ou plutôt de O.-E. Meyer (2) et de Sutherland (3); elle indique une déviation de la trajectoire rectiligne, d'autant plus prononcée que la température est plus basse.

235. **Résultats**. — Avec l'appareil ainsi établi, M. L. Meyer, aidé de M. O. Schumann, a étudié 34 substances, alcools et éthers de la série grasse.

Sous la même pression de vapeur saturante, mais à des températures très différentes, les viscosités absolues des éthers sont les suivantes :

Température d'ébullition normale.

	Méthyl.	Éthyl.	Propyl.	Isobutyl.	Amyl.
Acide formique	173	156	159	172	160
Acide acétique...........	152	152	160	155	»
Acide propionique........	150	158	153	164	158
Acide butyrique normal ..	159	160	164	167	155
Acide isobutyrique.......	152	151	153	158	155
Acide valérianique	163	165	167	154	»

La viscosité de la vapeur de tous ces éthers est sensiblement la même à la température d'ébullition.

(1) *Wien. Ber.*, t. LXV, 1872. — Stefan fait intervenir des atmosphères d'éther hypothétiques.

(2) O.-E. MEYER, *P. A.*, t. CXLVIII, 1873, p. 233. — Meyer invoque seulement la différence entre la *rencontre* des molécules et le choc de boules, qui n'en est qu'une image trop simplifiée; il montre d'ailleurs que les distances atomiques peuvent croître avec la température, quoique le diamètre répulsif de l'ensemble de la molécule, dans les phénomènes de viscosité, aille en diminuant.

(3) *Voir* Livre IV, Chapitre II.

Aucune différence régulière n'apparaît dans ce Tableau soit entre les lignes, les colonnes ou les diagonales montant de gauche à droite qui correspondent aux éthers isomères. Seule, la différence entre les butyrates et les isobutyrates paraît bien nette.

Pour les vapeurs des acides gras, la loi de compressibilité, notablement différente de celle de Mariotte, rend l'interprétation des expériences très douteuse. Ainsi, pour l'acide acétique, à 119°, le calcul de l'expérience avec la densité théorique donne 0,000107 et avec la densité mesurée par Cahours, supposée applicable sur toute la longueur du tube capillaire, 0,000163; pour l'acide butyrique, on passe de même de 0,000130 à 0,000150.

Viscosités calculées avec la loi de Mariotte à la température d'ébullition normale.

Acide formique	0,000112
Acide acétique	107
Acide propionique	117
Acide butyrique	130
Acide isobutyrique	122
Acide valérianique	135
Eau	132

Le Mémoire contient les Tableaux des vitesses d'agitation, des chemins moyens et des sections totales. La section totale en centimètres carrés par centimètre cube de vapeur croît régulièrement avec le poids moléculaire,

2,5 3 3,2 3,3 3,4 3,5 3,6 3,8

Je reproduis le Tableau des volumes moléculaires, obtenus par comparaison avec celui de l'anhydride sulfureux à — 8°, pris comme étalon. Voici ce Tableau simplifié, en supprimant les décimales et prenant des valeurs moyennes :

$$V = 0,000000300\left(\frac{\varpi(1+\alpha\theta)}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

	Méthyl.	Éthyl.	Propyl.	Isobutyl.	Amyl.
Acide formique	30 (64)	45 (86)	53 (108)	55 (130)	71 (152)
Acide acétique	46 (86)	57 (108)	62 (130)	74 (152)	»
Acide propionique	56 (108)	65 (130)	75 (152)	77 (174)	92 (196)
Acide butyrique	61 (130)	68 (152)	75 (174)	80 (196)	101 (218)
Acide isobutyrique	65 (130)	76 (152)	85 (174)	90 (196)	102 (218)
Acide valérianique	68 (152)	76 (174)	85 (196)	106 (218)	»

Les volumes moléculaires, d'après Kopp, sont écrits à côté entre parenthèses. Ceux-ci montrent une régularité de variation, fonction du poids moléculaire seul, que les nombres déduits de la viscosité sont loin d'atteindre. La mesure pénible et délicate de la viscosité de la vapeur n'est pas prête à prendre, dans les manipulations physico-chimiques, la place de la mesure de Kopp. Mais il est très intéressant de constater que le volume moléculaire à l'état de vapeur est sensiblement 0,47 (0,41 min., 0,53 max.) du volume moléculaire liquide de Kopp à la même température. Pour la benzine, on avait trouvé 0,57.

Les viscosités obtenues par Schuman, trois ans plus tard, au moyen des disques, sont notablement plus petites (n° **209**), elles conduisent donc à des volumes moléculaires plus grands, plus voisins de ceux de Kopp. Remarquons toutefois qu'elles se rapportent à 0° au lieu de la température d'ébullition.

D. — BARUS.

236. Hautes températures. — Carl Barus [1]. — Des expériences peu précises, mais intéressantes par le grand intervalle de température, 100° à 1300°, ont été exécutées par M. Barus, au moyen d'un tube capillaire en platine, enroulé en serpentin sur une partie de sa longueur et chauffé dans cette partie seulement; à 100° dans la vapeur d'eau, de 300° et 1000°, à diverses hauteurs dans la cheminée d'une lampe à pétrole, nue ou protégée par une enveloppe d'amiante, à 1000° dans la flamme d'un brûleur Bunsen avec une cheminée; enfin à 1300° en envoyant de l'oxygène dans le brûleur et protégeant par de l'amiante.

La température est mesurée par un couple platine-platine iridié.

La partie non directement chauffée dépasse le dixième de la longueur du tube; toutefois, comme la viscosité croît très vite avec la température et comme le tube de platine est assez épais par rapport à son diamètre intérieur $0^{cm},0158$, l'incertitude ne dépasse peut-être pas $\frac{1}{20}$ à $\frac{1}{30}$.

Le gaz chassé d'un récipient en verre par arrivée de mercure est recueilli après écoulement dans une éprouvette de verre graduée sur la cuve à eau. L'air et l'hydrogène ont été étudiés; pour l'hydrogène, le tube de platine à 1000° et 1200° doit laisser fuir du gaz; pour l'air,

(1) *Amer. Journ. of Sc.*, 1888; *W. Ann.*, t. XXXVI, 1889, p. 358.

il peut laisser rentrer des gaz non brûlés; à 1200° l'incertitude est rendue évidente par diverses circonstances de l'expérience.

Air.

$\theta - 273$.	$\frac{\mu}{\mu_0}\left(\frac{273}{\theta}\right)^{\frac{2}{3}}$.	$\frac{\mu}{\mu_0}\left(\frac{273}{\theta}\right)^{\frac{1}{2}}$.
565°	0,98	1,18
592	0,97	1,18
995	0,96	1,21
442	1,01	1,22
569	1,01	1,22
982	0,98	1,26

Ce Tableau semble décisif; la puissance $\frac{1}{2}$ ne convient pas, car le rapport doit être égal à 1; la puissance $\frac{2}{3}$ convient bien. Toutefois, il suffirait d'apprécier autrement la longueur chaude du tube, de la supposer plus longue pour réduire dans la même proportion le rapport sensiblement constant, quoique supérieur à 1, et se rapprocher de la loi du choc pur; mais, comme la partie effectivement chaude du tube n'est certainement pas beaucoup plus longue que ne l'a supposé M. Barus, nous pouvons conclure avec lui que, même à 800° et 1000°, le choc pur ne suffit pas à représenter la variation de la viscosité. La formule proposée plus tard par Sutherland représente tout aussi bien les expériences avec la même valeur 113 pour la constante C, qui convient très bien aux expériences précises de Holmann (1).

(1) SUTHERLAND, *Ph. M.*, t. XXXVI, 1893, p. 514.

CHAPITRE V.

EXPÉRIENCES DIVERSES.

237. Gyösö Zemplèn. — *Air à la température ambiante* (¹). — Ces recherches ont été effectuées au laboratoire de M. Eötvös, à l'Université de Buda-Pest, par la méthode d'Helmholtz et Piotrowsky (²), en suivant l'amortissement d'une sphère creuse portée par un fil de torsion, à l'intérieur d'une autre sphère pleine. Une ingénieuse disposition assure le centrage parfait.

La sphère mobile a été obtenue par dépôt galvanique de cuivre sur une sphère de paraffine de 5^{cm} de diamètre, dont l'égalité des diamètres avait été contrôlée à $\frac{1}{25}$ de millimètre près. L'électrolyse a duré une semaine, pour atteindre une épaisseur de $1^{mm},5$. La sphère extérieure est formée de deux hémisphères. Le frottement s'exerce entre les deux sphères distantes de 1^{cm}, et à l'intérieur de la sphère mobile, mais ce dernier n'intervient qu'à titre de correction. Le calcul des expériences a été rendu rapide par le tracé d'une courbe auxiliaire en prenant le produit $\sqrt{\frac{\rho\theta_1}{\mu}}$ (n° 87) comme variable indépendante.

Les expériences très soignées, sur l'air sec et privé de gaz carbonique, donnent à $20°,4$

$$\mu = 0,0001794$$

à 1 pour 100 près.

238. Tomlinson (³). — Au cours d'expériences sur la torsion des fils métalliques, M. Tomlinson a employé pour faire varier le moment d'inertie une règle horizontale portant de longs poids cylindriques

(¹) *Dr. Ann.*, t. XIX, 1906, p. 783.
(²) Voir la *Théorie du mouvement des sphères*, nᵒˢ 87 et suivants.
(³) *Phil. Trans.*, t. CLXXVII, 1886, p. 767.

verticaux mobiles. Il a reconnu que l'amortissement indique une résistance composée de deux termes, l'un proportionnel au carré de la vitesse, l'autre seul important aux petites amplitudes, proportionnel à la vitesse : ce dernier est lié directement à la viscosité de l'air. Stokes, qui dans son Mémoire sur les expériences de Baily avait déjà fait la théorie de la résistance que subit un long cylindre dans une translation transversale, a calculé les expériences de Tomlinson, dans un appendice (¹), et a obtenu la valeur

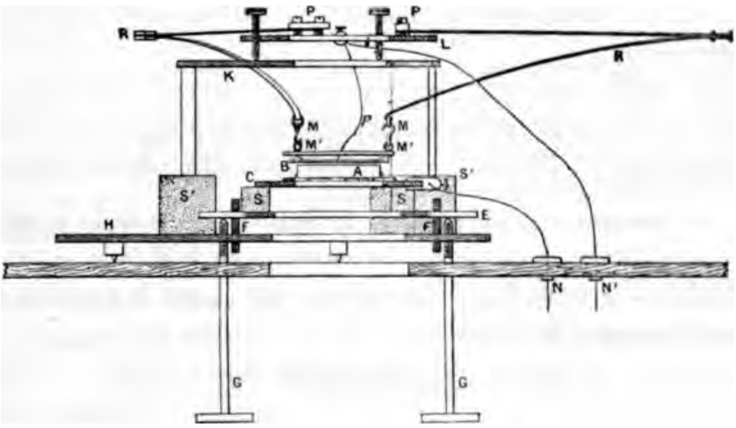
$$\mu = 0{,}000172$$

pour l'air à 0°.

Le calcul numérique est trop pénible, et la théorie même trop compliquée pour que ce dispositif constitue une méthode de mesure à décrire avec détail ; il suffit d'en connaître le résultat (²).

239. Expériences de Fabry et Pérot (³). — Je signalerai en terminant la détermination de la viscosité de l'air effectuée par MM. Fabry et Pérot au moyen de leur électromètre absolu.

Fig. 83.



L'électromètre absolu (*fig.* 83) se composait essentiellement d'un verre *plan* A fixe de 3^{cm} de rayon, au-dessus duquel un autre disque

(¹) STOKES, *Papers*, t. V, p. 180-220 et, pour la discussion d'expériences de Crookes, p. 100-116.

(²) *Voir* aussi BOUASSE, *Sur les oscillations à peu près sinusoïdales à longue période* (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, t. XI, 1897).

(³) *Ann. Chimie*, t. XIII, 1898, p. 273.

plan B, de diamètre plus grand est supporté par l'intermédiaire de trois longs ressorts de flexion R orientés à 120° les uns des autres. Ces disques, argentés faiblement, sont traversés de bas en haut par la lumière d'un chalumeau contenant des sels de sodium et de lithium, et donnent de très belles franges au moyen desquelles on règle le parallélisme des disques. Lorsqu'on dépose doucement au centre du disque supérieur une très petite surcharge, le parallélisme est conservé ([1]) et ce plateau s'abaisse assez rapidement lorsque la distance dépasse 500 demi-longueurs d'onde, très lentement lorsque la distance est inférieure à 100 demi-longueurs d'onde. Ce ralentissement est dû à la viscosité de la mince couche d'air comprise entre les deux disques.

Une surcharge de 22^{mg} fait passer 18 franges, dont les dix premières mettent à peu près 20 secondes à passer.

On détermine la distance initiale par la méthode des *franges de superposition*, on dépose la surcharge et l'on enregistre sur un chronographe le passage des franges successives ainsi que les battements d'une horloge astronomique. Le passage des deux dernières franges est extrêmement lent et ne peut faire connaître la distance finale avec précision; on regarde la distance finale et le coefficient de viscosité de l'air comme deux inconnues à déterminer par l'ensemble des observations.

Cette faible surcharge équivaut à une augmentation de pression uniforme de moins d'un *millionième* d'atmosphère ; la vitesse de descente ne dépasse pas $0^{cm},15$ *à l'heure*. La force d'inertie est inférieure au millionième de la surcharge.

Le mouvement de l'air est alors un mouvement d'écoulement permanent à densité pratiquement constante dont la théorie se fait sans difficulté ; l'excès de la pression p à distance r, sur la pression extérieure au bord R des disques, est lié à la vitesse de descente $-\frac{\partial h}{\partial t}$ et à l'épaisseur actuelle h par l'équation

$$\delta p = \frac{3\mu}{h^3}\left(-\frac{\partial h}{\partial t}\right)(R^2 - r^2).$$

La surcharge est à chaque instant équilibrée en partie par les ressorts, en partie par la résultante de ces excès de pression sur toute la

---

([1]) Cette surcharge formée par un très petit fil de platine, convenablement courbé, est déposée ou soulevée au moyen d'un crochet (*fig.* 4, p. 414 du Mémoire) dont le mouvement exactement vertical est commandé de loin par une poire de caoutchouc.

surface du disque ; d'où l'on tire l'équation

$$mg\frac{h-h_1}{h_0-h_1}=\frac{3\mu}{h^3}\frac{\pi R^4}{2}\left(-\frac{dh}{dt}\right),$$

h_0 et h_1 étant les distances initiale et finale ; g l'intensité de la pesanteur.

L'intégration (¹) donne

$$t=\frac{3\mu}{h_1^2}\frac{\pi R^4}{2}\frac{h_0-h_1}{mg}\left[\frac{h_1(h-h_0)}{h_0 h}+\frac{h_1^2(h^2-h_0^2)}{2h_0^2h^2}-\log\frac{h(h_0-h_1)}{h_0(h-h_1)}\right],$$

qui peut servir au calcul de μ, lorsqu'on a mesuré t pour diverses valeurs de h; toutefois la complication de la formule a conduit MM. Fabry et Pérot à employer une méthode de calcul semi-graphique semi-analytique qu'il est inutile d'indiquer ici.

Pour 17 franges observées, sur 18,4 que donnerait le placement total, les temps observés et calculés concordent à $\pm 0^s,1$ en employant

$$\mu = 173.10^{-6}.$$

Malheureusement la température, évidemment peu différente de 15°, n'est indiquée nulle part dans le Mémoire.

240. Mélanges gazeux. — Graham, s'étant aperçu que l'addition d'une petite quantité d'hydrogène, peu visqueux, au gaz carbonique qui l'est bien davantage, augmente encore cette viscosité, a fait de nombreuses expériences sur la viscosité des mélanges, et a retrouvé cette même singularité dans presque tous les mélanges qui contiennent de l'hydrogène. Dans tous les Tableaux qui suivent, la viscosité de l'oxygène à 15° est prise pour unité ; les poids moléculaires sont inscrits à côté des formules des gaz; les proportions sont données en volumes.

Remarquons en particulier que la substitution totale de l'hydrogène à l'air réduit la viscosité de moitié ; mais la réduction est d'un tiers seulement lorsqu'il reste un dixième d'air. La viscosité est toujours très supérieure à la moyenne d'après la composition en *volume*.

(¹) En corrigeant les fautes d'impression de la formule 8 (p. 281) du Mémoire de Fabry et Pérot.

CO^2(44).	1	0,9	0,75	0,5	0,25	0,1	0			
H^2(2)...	0	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	1			
μ.......	0,751	0,753	0,752	0,734	0,679	0,572	0,450			
CO(28)..	1	0,95	0,90	0,75	0					
H^2(2)...	0	0,05	0,10	0,25	1					
μ.......	0,870	0,865	0,865	0,843	0,450					
CH^4(16).	1	0,975	0,95	0,9	0,75	0,5	0,25	0,1	0,0	0,[illegible]
H^2(2)...	0	0,025	0,05	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,95	0[illegible]
μ.......	0,550	0,550	0,561	0,563	0,559	0,560	0,531	0,496	0,480	0[illegible]
Air......	1	0,95	0,9	0,75	0,5	0,25	0,1	0,05		
H^2(2)...	0	0,05	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,95		
μ.......	0,900	0,896	0,889	0,879	0,820	0,719	0,588	0,528		
CO^2(44).	1	0,95	0,9	0,75	0,5	0,25	0,1	0,5	0	
O^2(32)..	0	0,05	0,1	0,23	0,5	0,75	0,9	0,95	1	
μ.......	0,751	0,756	0,768	0,807	0,871	0,942	0,976	0,987	1	
O^2(32)..	1	0,5	0,25	0,1	0,05	0				
CH^4(16).	0	0,5	0,75	0,9	0,95	1				
μ.......	1	0,808	0,690	0,598	0,583	0,550				
O^2(32)..	1	0,5	0,33	0,25	0,1	0				
Az^2(28)..	0	0,5	0,67	0,75	0,9	1				
μ.......	1	0,935	0,914	0,905	0,885	0,875				
O^2(32)..	1	0,75	0,67	0,5	0,33	0,25	0			
CO(28)..	0	0,25	0,33	0,5	0,67	0,75	1			
μ.......	1	0,967	0,959	0,936	0,913	0,904	0,870			

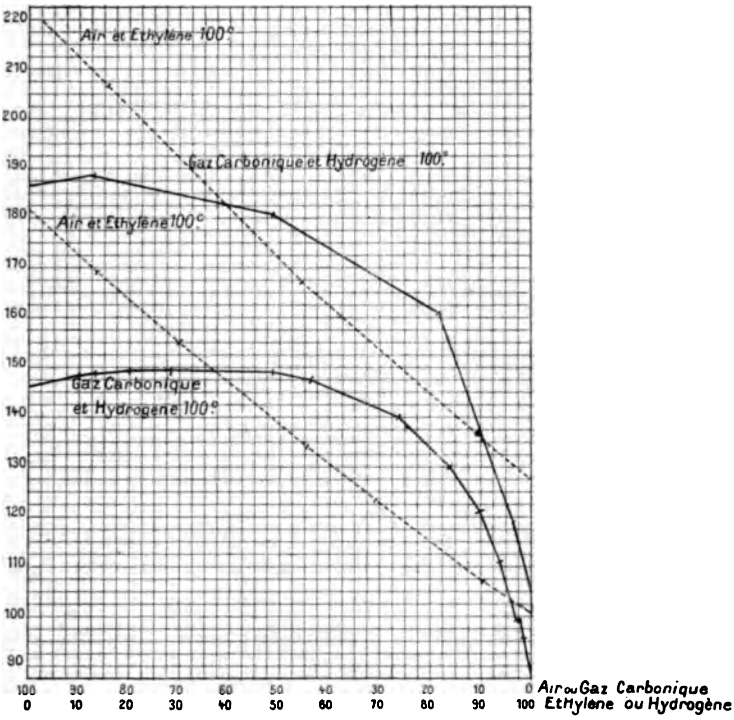
On remarquera l'identité presque parfaite des deux derniers Tableaux. De même le bioxyde d'azote, Az^2O mêlé à l'hydrogène, donne des résultats presque identiques à ceux du gaz carbonique (même masse moléculaire, même viscosité) mêlé à l'hydrogène ; il paraît inutile de le reproduire.

Ces résultats ont été confirmés par Puluj ([1]) pour les mélanges d'hydrogène et de gaz carbonique à 15°, par la méthode des disques oscillants. Plus récemment, M. Breitenbach ([2]) a fait quelques expériences sur le même mélange et sur le mélange d'air et d'éthylène à 15° et à 100°, par l'écoulement à travers des tubes ; il a représenté ses résultats et ceux de Puluj dans les courbes que reproduit la figure 84. Les proportions du mélange en volume sont portées en abscisse; les viscosités, multipliées par 10^6, en ordonnée. Les deux

([1]) *Carl Répert.*, t. XV (*voir* Chap. II, n° 208).
([2]) *Dr. Ann.*, t. LXVII, 1899 (*voir* Chap. IV, n° 225).

courbes les plus basses sont relatives à la température de 15° (et non de 100°, comme cela est inscrit sur la figure). Les courbes en traits

Fig. 84.



pleins, concaves vers le bas, se rapportent aux mélanges de gaz carbonique et d'hydrogène. Les courbes en pointillé, à peine convexes vers le bas, se rapportent aux mélanges d'air et d'éthylène.

LIVRE IV.

THÉORIES MOLÉCULAIRES. — CONCLUSION.

CHAPITRE I.

PREMIERS ESSAIS DE THÉORIE.

241. Navier ([1]). — **Principes.** — La première tentative théorique, celle de Navier, est une modification de l'hypothèse des actions à distance, fonctions de la seule distance, entre molécules en équilibre.

« Nous admettrons que, dans un fluide en mouvement, deux molécules qui s'approchent l'une de l'autre se repoussent plus fortement, et que deux molécules qui s'éloignent l'une de l'autre se repoussent moins fortement qu'elles ne le feraient si leur distance actuelle ne changeait pas; et nous prendrons pour principe, dans les recherches suivantes, que, par l'effet du mouvement d'un fluide, les actions répulsives des molécules sont augmentées ou diminuées d'une quantité proportionnelle à la vitesse avec laquelle les molécules s'approchent ou s'éloignent les unes des autres. »

Même supposition pour les actions entre les molécules du fluide et celles des parois.

Ces actions, comme les actions moléculaires, ne sont supposées sensibles qu'à très petite distance; les molécules, étant très voisines, auront des vitesses très peu différentes; leur action, qui dépend de la

([1]) *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, p. 389-440 (*Mém. de l'Institut*, t. VI, 1823).

vitesse relative, très petite, lui sera proportionnelle :

$$F = f(r)\,\frac{dr}{dt}.$$

De là, Navier arrive facilement, par des calculs semblables à ceux qu'il avait déjà faits en 1821 pour l'élasticité, à la résultante de toutes ces actions sur un élément de volume $dx\,dy\,dz$:

$$\varepsilon\left(\Delta u + 2\,\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz,$$

suivant x, avec

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

en posant

$$\varepsilon = \int_0^\infty \frac{8\pi}{30}\, r^4 f(r)\,dr.$$

Quant à la paroi, la résistance qu'elle oppose est alors proportionnelle à la vitesse relative u du fluide en contact et égale à Eu, en posant

$$E = \frac{2\pi}{3}\int_0^\infty r^2\,dr\,F(r),$$

où $F(r)\frac{dr}{dt}$ est l'action mutuelle de viscosité entre une molécule du liquide et une file de molécules de la paroi.

Ce qui conduit aux équations mêmes que nous avons adoptées.

Navier n'indique d'ailleurs nullement comment peut se produire une telle action; il l'introduit, comme on l'a vu plus haut, à titre d'hypothèse suggérée et presque commandée par les faits.

Puis Navier en fait l'application, d'abord à un tuyau rectangulaire (*Ann. Ch. Ph.*, t. XIX, 1822) et seulement l'année d'après (*Mém. de l'Inst.*, 1823) au tuyau circulaire, en passant dans l'un et l'autre cas par de longs et pénibles développements en série, parce qu'il traite de l'état variable à partir d'un état initial quelconque.

Il obtient, pour l'état permanent dans un tube circulaire de section très petite, l'expression suivante de la vitesse *moyenne* U :

$$U = \frac{\rho g G}{\alpha}\,\frac{R}{2E\left(1 + \frac{ER}{2\varepsilon}\right)},$$

où $\frac{\rho g G}{\alpha}$ est la chute de pression par unité de longueur, et R le rayon du tube supposé très petit pour réduire un développement en série à ses premiers termes.

Cette équation donne la prépondérance au frottement le long de la paroi, par suite du choix particulier que fait Navier de la distribution la plus simple des vitesses, laquelle ne correspond pas, en réalité, à un état permanent.

Il termine en comparant ce résultat aux expériences de Girard.

242. Poisson. — Relâchement de l'élasticité. — C'est dans son grand Mémoire de 1829 sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides ([1]), que Poisson aborde l'étude de la viscosité des fluides. « Lorsque les molécules d'un fluide se déplacent, elles emploient un certain temps, quelque petit qu'on le suppose, pour parvenir autour de chaque point à une disposition semblable à leur arrangement primitif, et pour exercer de nouveau une pression égale en tous sens. Pendant ce temps très court, qui peut être néanmoins très différent pour les différents fluides, la pression n'est pas nécessairement la même suivant toutes les directions » (p. 95). Toutefois, le langage n'était pas encore fixé, et Poisson réserve le nom de viscosité pour ce que nous appelons actuellement les déformations résiduelles.

L'idée prend toute sa précision au paragraphe 7, et conduit, *avec nos notations habituelles,* aux expressions suivantes de la force par unité de surface normale à Ox (p. 145) :

$$X_x = -p + \int_0^t X_x(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau,$$

$$Y_x = \int_0^t Y_x(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau,$$

$$Z_x = \int_0^t Z_x(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau;$$

avec [form. (3), p. 141],

$$X_x = 2a\frac{\partial u}{\partial x} - b\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$Y_x = a\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$Z_x = +a\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

u, v, w est la vitesse à la même époque τ à laquelle se rapportent X_x,

([1]) *Journ. Éc. Polyt.*, XXe Cahier.

Y_x, Z_x. φ est une fonction égale à 1 lorsque sa variable est nulle, et qui tend très rapidement vers 0.

Enfin on a (p. 140) :

$$30\varepsilon^3 b = \sum \left\{ 5rf(r) - r^3 \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}f(r)\right] \right\}$$

et

$$30\varepsilon^3 a = \sum \left\{ 5rf(r) + r^3 \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}f(r)\right] \right\},$$

où $f(r)$ représente la force *répulsive* mutuelle entre deux points, la somme Σ étant étendue à tous les points situés dans la sphère d'activité d'un point central; ε^3 est le volume moyen qui contient une molécule.

Ces expressions se simplifient toutes les fois que le mouvement n'est pas extrêmement rapide; car, en raison des propriétés attribuées à la fonction φ, on peut faire sortir $X_x(\tau)$, etc., du signe $\int$ et écrire

$$X_x = -p + \left[2a\frac{\partial u}{\partial x} - b\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\alpha,$$

$$Y_x = a\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\alpha,$$

$$Z_x = a\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\alpha,$$

en posant

$$\int_0^\infty \varphi(t)\,dt = \alpha.$$

Enfin on a

$$6\varepsilon^3 p = \sum rf(r).$$

On forme ensuite sans difficulté les équations du mouvement d'un élément de volume.

Passant de là aux conditions à la paroi, les mêmes considérations sur la disparition progressive de l'élasticité conduisent Poisson à introduire un frottement de glissement proportionnel à la vitesse relative le long de la paroi.

Poisson ne s'explique d'ailleurs pas sur les causes possibles de ce relâchement rapide de l'élasticité; il l'introduit seulement comme caractéristique de l'état fluide.

Il ne traite aucun problème particulier dans ce Mémoire.

243. Maxwell. — C'est seulement en 1866 qu'on voit reparaître le point de vue de Poisson appliqué aux fluides. « Le phénomène de la viscosité dans tous les corps peut être décrit de la manière suivante, indépendamment de toute hypothèse, dit Maxwell dans son Mémoire *Sur la théorie dynamique des gaz.* »

Une déformation que nous appelons S est produite dans un corps par un déplacement; elle excite un état de tension F. La relation entre la déformation et la tension peut s'écrire $F = ES$, où E est le coefficient d'élasticité relatif à la déformation S. Dans un solide dépourvu de viscosité, F reste égal à ES, et l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial t} = E\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Mais, si le corps est visqueux, F, au lieu de rester constant, s'évanouit avec une rapidité qui dépend de F et de la nature du corps. Si nous supposons cette vitesse proportionnelle à F, l'équation peut s'écrire

$$\frac{\partial F}{\partial t} = E\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{F}{T},$$

qui représente empiriquement le phénomène actuel. Car, si S est constant, l'équation

$$F = ESe^{-\frac{t}{T}}$$

montre que F disparaît graduellement; le corps abandonné à lui-même perd graduellement sa tension interne et les pressions finissent par se distribuer comme dans un fluide en repos.

Si $\frac{\partial S}{\partial t}$ est constant, c'est-à-dire si un mouvement permanent du corps accroît constamment le déplacement, on a

$$F = ET\frac{\partial S}{\partial t} + Ce^{-\frac{t}{T}},$$

ce qui montre que F tend vers une valeur constante qui dépend de la vitesse de déplacement. La quantité ET, par laquelle il faut multiplier la vitesse de déplacement pour obtenir la force, peut être appelée *coefficient de viscosité*. C'est le produit d'un coefficient d'élasticité E par un temps T, qu'on peut appeler le *temps de relaxation* ou *durée de relâchement* de la force élastique. Dans les fluides mobiles, T est une très petite fraction de seconde et E n'est pas facile à déterminer par expérience. Dans les fluides visqueux, T peut atteindre des heures et des jours; alors E est facile à mesurer.

Il est, en outre, possible que dans certains corps T soit une fonction de F.

244. Gaz. — « Dans une collection de molécules en mouvement, comme dans notre hypothèse sur les gaz, il y a aussi une résistance au changement de forme, constituant ce qu'on peut appeler l'*élasticité linéaire* ou la *rigidité du gaz,* mais cette résistance tombe et diminue avec une vitesse qui dépend de la grandeur de la force et de la nature du gaz. »

Évaluant cette élasticité mise en jeu par une dilatation instantanée, Maxwell regarde E comme égal à la pression, d'où $T = \frac{\mu}{p}$, ce qui donne pour l'air sous la pression atmosphérique une valeur de T égale à 2.10^{-10} secondes environ et des valeurs de même ordre pour les autres gaz.

Ici, le mécanisme est précisé par la théorie cinétique elle-même. Ce sont les chocs contre la paroi qui produisent la pression; ce sont les chocs mutuels des molécules qui l'égalisent en tous sens et la rendent isotrope. Faisons d'abord abstraction de ces derniers chocs et supposons le milieu dilaté instantanément dans une direction, contracté dans les deux autres, sans changement de volume; la distribution primitivement isotrope des vitesses est transformée en une distribution ellipsoïdale, les cosinus α, β, γ sont changés en

$$\alpha' = \alpha(1 + D_1 + \varepsilon), \qquad \beta' = \beta(1 + D_2 + \varepsilon), \qquad \gamma' = \gamma(1 + D_3 + \varepsilon)$$

avec la condition

$$(\alpha^2 D_1 + \beta^2 D_2 + \gamma^2 D_3) + \varepsilon = 0$$

pour que α', β', γ' soient encore des cosinus directeurs d'une droite, et la liaison

$$D_1 + D_2 + D_3 = 0$$

pour la conservation du volume.

Rappelons le calcul de la pression sur une face normale à Ox : une molécule de masse m, dont la vitesse projetée sur Ox est u, exerce sur la paroi une impulsion $2mu$, au moment du choc qui renverse la vitesse. Les molécules de cette espèce, qui viennent frapper une surface S de la paroi pendant le temps dt, sont comprises au début dans le volume $S u\,dt$ du cylindre qui a S pour base et $u\,dt$ pour hauteur; soit $nS u\,dt$ ce nombre, en appelant n le nombre des molécules de

cette espèce par unité de volume. L'impulsion totale qu'elles produisent en dt est $2nmu^2\,dt$ et, en général, $\Sigma\, 2mu^2\,dt$.

Dans le cas actuel, avant déformation,

$$u = \alpha V, \qquad \Sigma\, 2m\alpha^2 V^2 = p$$

et aussitôt après, si la vitesse d'agitation V n'a pas changé,

$$u = \alpha' V, \qquad \Sigma\, 2m\alpha^2(1 + 2D_1 + 2\varepsilon)V^2 = p + \delta p,$$

d'où

$$\delta p = 2D_1 p - \Sigma\, 4m\alpha^2(\alpha^2 D_1 + \beta^2 D_2 + \gamma^2 D_3)V^2$$
$$= 2D_1 p - \tfrac{6}{5} D_1 p - \tfrac{2}{5}(D_2 + D_3)p$$

et avec

$$D_1 + D_2 + D_3 = 0,$$
$$\delta p = 1{,}2\,p.D_1.$$

En prenant ainsi les moyennes correctement, au lieu de réduire, comme Maxwell, à trois directions de mouvement avant de faire les moyennes, nous trouvons

$$E = \frac{1{,}2}{2} p$$

par comparaison avec la formule d'élasticité

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu D_1$$

(E correspond à μ), au lieu de $E = p$ de Maxwell.

L'anisotropie, dans la distribution des vitesses, ainsi créée par la dilatation instantanée, disparaît rapidement sous l'influence des chocs mutuels.

245. Schwedoff. Sur la rigidité des liquides (1). — C'est toutefois à la limite de l'état solide et de l'état liquide que les considérations précédentes s'appliquent le plus utilement

Les expériences de Coulomb laissaient indécise une question importante : les liquides visqueux ne possèdent-ils aucune trace de *solidité?* Pour les liquides comme l'alcool ou l'éther, le doute n'est pas possible; la possibilité de construire des niveaux à bulle d'air de haute précision, comme on les emploie dans les instruments astronomiques, montre que l'équilibre hydrostatique est rigoureusement

(1) Rapport au Congrès de Physique, 1900, t. I, p. 478.

atteint. Mais les huiles, la glycérine, les baumes ne présentent-ils pas de propriétés des solides, quand on les déforme considérablement? C'est ce que Maxwell a examiné le premier, en 1874, et il a constaté que le baume du Canada devient biréfringent pendant qu'on le déforme; Kundt (*W. A.*, 1881), de Metz (*W. A.*, 1888) ont reconnu que la glycérine, le sirop de sucre, la solution de gomme arabique ne présentent aucune double réfraction, à l'opposé de solutions de gélatine, même extrêmement étendues et très mobiles.

En 1889, Schwedoff a attaqué la question directement, en mesurant à la fois les couples et les rotations d'un cylindre suspendu par un fil de torsion dans l'axe d'un autre cylindre fixe, lorsque le liquide à étudier remplit l'espace annulaire.

Pour un liquide véritable, entièrement dépourvu de rigidité, l'équilibre n'existe que pour une torsion nulle du fil de suspension. Telle est la glycérine.

Un liquide rigide se comporte autrement; une torsion du fil tord le liquide et la position d'arrêt n'est pas une position de torsion nulle du fil. Au moment même où l'on produit la torsion, l'élasticité seule du liquide rigide entre en jeu et le couple de torsion est proportionnel à l'angle de la torsion. Si cet angle est inférieur à une certaine limite, l'élasticité reste parfaite. Mais, si cet angle excède la limite, le couple diminue peu à peu et tend vers une limite, à déformation totale constante. Lorsque cette limite est atteinte, la déformation est la somme de la déformation élastique limite, qui disparaît quand on annule le couple, et d'une déformation résiduelle qui croît progressivement avec le temps.

L'équilibre est atteint, en fonction du temps, suivant une loi différente de celle qu'indiquerait une simple viscosité. Soient C le couple de torsion, γ l'angle de torsion, γ_0 l'angle limite, E le module d'élasticité et β un coefficient de déperdition. On a

$$C = E\gamma \qquad \text{pour } |\gamma| \leqq \gamma_0.$$

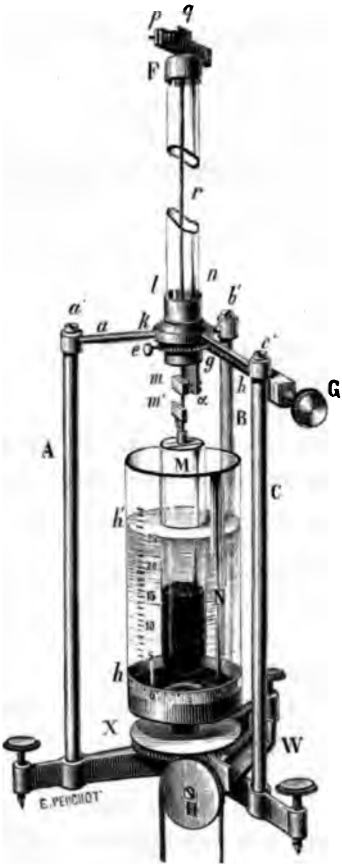
Lorsque γ est supérieur en valeur absolue à γ_0, M. Schwedoff est conduit à représenter les résultats de ses expériences par un ensemble de formules qu'on peut condenser en une équation différentielle

$$\frac{d}{dt}(C - E\gamma) = \beta(C - E\gamma_0).$$

246. Mesures. — Les mesures ont été effectuées au moyen de l'appareil représenté par la figure 85.

On a constaté ainsi que, après 24 heures de prise, la rigidité d'une solution de gélatine à $\frac{1}{2}$ pour 100 est de 0,535 (C.G.S.) [acier $= 10^{12}$]. Le glissement limite qu'on peut calculer, d'après les données de Schwedoff [1], est 0,0154; le coefficient β est égal à 0,073.

Fig. 85.



On peut toutefois remarquer que les lois seraient les mêmes si le phénomène de relâchement était localisé à la surface de contact de la

(1) Glissement le long du cylindre intérieur, où il est maximum,

$$\left(r\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right)_0 = 2\gamma_1\frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}, \qquad \gamma_1 = 0{,}0032, \qquad \begin{array}{l} r_0 = 2^{cm},851, \\ r_1 = 4^{cm},108. \end{array}$$

solution toujours élastique et du cylindre; car M. Schwedoff n'a opéré qu'avec un seul appareil de rayons déterminés; mais les apparences seraient probablement différentes.

Enfin, lorsque le couple extérieur varie trop rapidement en fonction de la déformation, la solution se *déchire;* il y a une limite de ténacité que M. Schwedoff a observée, mais au-dessous de laquelle il s'est systématiquement tenu dans ses mesures.

Pour de tels corps, une déformation indéfiniment croissante à vitesse constante

$$\gamma = vt$$

donne lieu à un couple qu'on obtient en intégrant l'équation

$$\frac{dC}{dt} = \beta C + E(v - \beta\gamma_0)$$

ou

$$C = \frac{E}{\beta}(v - \beta\gamma_0) + Ae^{-\beta t},$$

la constante A dépend de l'état initial. Quelle qu'elle soit, au bout d'un temps très long son influence disparaîtrait et, dans les mesures de viscosité à l'état permanent, on trouverait un coefficient $\frac{E}{\beta}$ tout à fait analogue à un coefficient de viscosité, et en outre un terme constant $- E\gamma_0$ indépendant de la vitesse.

Pour tous les liquides purs, les expériences, soit d'écoulement par les tubes, soit de rotation, donnent très rigoureusement la proportionnalité de la force au débit, sans terme constant. Il n'est donc pas douteux qu'il existe des liquides dépourvus d'élasticité permanente. Ce sont ceux-là seuls que nous avons étudiés dans ce Livre, à l'exception des solutions gélatineuses et colloïdes.

On voit, en outre, comment une élasticité entièrement temporaire peut donner naissance à la viscosité. Si l'on a, en effet, $\gamma_0 = 0$ (fluide) et si la déformation est lente $\left(\frac{dC}{dt}\right.$ négligeable devant $\left.\beta C\right)$, l'équation générale des résidus se réduit à

$$C = -\frac{E}{\beta}\frac{d\gamma}{dt},$$

c'est-à-dire à la viscosité pure. Mais, pour des déformations plus

rapides, il faudrait conserver

$$\frac{dC}{dt} = \beta C + E \frac{d\gamma}{dt}.$$

C'est l'hypothèse émise par Poisson dans sa théorie de la viscosité (1822) et reprise plus récemment par M. Natanson ([1]).

Toutefois les observations récentes de Rankine sur les solutions de gélatine étendues, révèlent une complication plus grande que ne l'indique cette théorie.

([1]) *Académie des Sciences de Cracovie,* 1901, 1903, 1904.
Voir DE METZ, *La double réfraction accidentelle dans les liquides* (*Collection Scientia,* 1906).

CHAPITRE II.

GAZ. — THÉORIES DYNAMIQUES.

247. Gaz cinétique. — Lorsqu'on a égard à l'agitation moléculaire, les échanges de matière entre couches voisines sont accompagnés d'un transport de quantité de mouvement des couches où le mouvement d'ensemble est le plus rapide vers les plus lentes. Si l'on trace une surface de séparation arbitraire entre deux parties A et B d'un fluide agité, la partie A reçoit à travers chaque élément de surface un excès, positif ou négatif, de quantité de mouvement, ayant une direction déterminée; cet excès peut être évalué soit « en nature » si l'on se tient strictement au point de vue cinétique, soit par les forces capables de le produire sans échange de matière, en adoptant le langage de la Mécanique des fluides, qui ne préjuge rien; les composantes normale et tangentielle des forces de viscosité par unité de surface sont égales aux composantes de même direction de l'excès de quantité de mouvement qui traverse cette unité de surface pendant l'unité de temps. Le propre des théories cinétiques est de rattacher la viscosité aux dimensions moléculaires et à l'agitation générale, par conséquent à la température. La manière la plus simple d'y parvenir est la suivante.

248. Parcours libre. — Considérons une des molécules en mouvement au milieu des autres, supposées immobiles; traçons un cylindre parallèle à la vitesse de la molécule, dont la section droite circulaire a un rayon égal au *diamètre* $2R$ de la molécule, et prolongeons-le jusqu'à ce que le centre d'une molécule fixe soit intérieur à ce cylindre. La molécule mobile peut se mouvoir en ligne droite jusque-là; mais, lorsque la sphère de rayon double du rayon moléculaire atteint la molécule fixe, un choc a lieu et la molécule est déviée. On peut continuer à la suivre dans sa nouvelle direction jusqu'à un nouveau choc, etc. Sur un long parcours, la molécule a subi autant de chocs

que le tube de section $\pi(2R)^2$, à axe brisé, a contenu de centres de molécules fixes. Dans un gaz de très faible densité, le volume de ce tube est sensiblement égal au produit de sa section droite par la longueur totale L de son axe, malgré les coudes, et ce volume $\pi(2R)^2.L$ contient $N.\pi(2R)^2.L$ centres de molécules si le nombre de molécules par unité de volume est N; tel est le nombre de chocs de la molécule mobile pendant le parcours total L. Le rapport de la longueur L au nombre de chocs est le *parcours libre moyen* de la molécule mobile λ :

$$\lambda = \frac{L}{N.4\pi R^2.L} = \frac{1}{N.4\pi R^2},$$

c'est la longueur du cylindre qui contient une molécule en moyenne.

Si nous prenons pour longueur L le chemin parcouru en moyenne pendant l'unité de temps par la molécule mobile, c'est-à-dire la vitesse Ω de cette molécule, nous obtenons le nombre n de chocs de cette molécule, pendant l'unité de temps, contre toutes les autres supposées immobiles,

$$n = N.4\pi R^2.\Omega.$$

Lorsque toutes les molécules sont agitées à la fois, ces diverses expressions doivent évidemment être multipliées par des coefficients numériques un peu différents de l'unité; nous ne nous en occuperons pas ici ([1]).

Le nombre de chocs mutuels par unité de temps entre toutes les molécules contenues dans l'unité de volume est alors

$$\tfrac{1}{2} N.N 4\pi R^2.\Omega,$$

en ne comptant qu'une fois chaque choc de deux molécules.

La vitesse Ω est déterminée par la comparaison de la loi de compressibilité expérimentale

$$p = \left(\frac{p_0}{\rho_0 T_0}\right)\rho T$$

avec la loi que donne la théorie cinétique

$$p = \tfrac{1}{3}\rho\Omega^2.$$

([1]) *Voir* Boltzmann, *Leçons sur la théorie des gaz*. Paris, Gauthier-Villars. — O.-E. Meyer, *Die kinetische Theorie der Gase*. — Jeans, *The dynamical theorie of gases*. — Kirchhoff, *Wärme*. — Jager, *Die Fortschritte der Kinetischen Gastheorie*.

Mettant les nombres à la place des lettres, on trouve

$$\Omega = 15800\sqrt{\frac{T}{M}}\ \text{cm./sec.},$$

en appelant M la masse moléculaire du corps ($M = 2$ pour l'hydrogène).

249. Variabilité apparente du diamètre moléculaire. — Dans la première forme de la théorie cinétique, le diamètre des sphères qui représentent les molécules était regardé comme rigoureusement déterminé par la nature chimique de la molécule, indépendamment de l'état physique du corps. Évidemment trop simple pour s'adapter à l'état solide ou même à l'état fluide non loin du point critique, cette hypothèse s'est montrée encore plus insuffisante pour les phénomènes de diffusion, qui dépendent directement des parcours libres, que pour l'équation d'état. Revenons donc aux actions à distance et conservons la notion de parcours libre, parce qu'elle fait image, bien que sa définition manque alors de précision. De toute façon, l'état solide montre l'existence de répulsions très énergiques et très rapidement variables au-dessous d'une certaine distance; suivant leur force vive deux molécules se rapprocheront plus ou moins avant de se séparer de nouveau; la distance minimum est d'autant moindre que la force vive est plus grande. Pour une valeur déterminée de la force vive, le domaine impénétrable a une forme et une grandeur entièrement définies par la loi de répulsion; on peut le caractériser par un seul paramètre fonction de la force vive, par exemple la distance minima dans le choc direct. *Si la répulsion est proportionnelle à r^{-n}, cette distance minima est proportionnelle à $\Omega^{-\frac{2}{n-1}}$, Ω étant la vitesse d'agitation moléculaire.* On peut prendre cette distance pour définir, proportionnellement, le rayon moléculaire et le chemin moyen. Dans ce cas, le chemin moyen serait proportionnel à $\Omega^{\frac{4}{n-1}}$ ou encore à $(T)^{\frac{2}{n-1}}$, T étant la température absolue.

Cette image, due à Maxwell et appliquée sous cette forme simplifiée par Meyer, s'est montrée encore trop simple. Un même exposant n ne convient qu'à un intervalle de température étroit; l'exposant paraît varier en sens inverse de la température. Fallait-il supposer la loi de répulsion plus compliquée et chercher une sorte de loi de variation de n en fonction de la profondeur atteinte? Le sens de la variation de n était peu favorable à cette vue. M. Sutherland, de

Melbourne, est revenu à l'idée essentielle de la théorie cinétique (1), et, rappelant que dans l'équation d'état les actions attractives jouent un rôle important, il est revenu à l'hypothèse d'actions attractives s'exerçant dans un domaine étendu, et d'actions répulsives tellement intenses qu'on peut toujours les représenter par un choc sur une sphère de diamètre fixe. Dans leur trajet relatif, les molécules peuvent se comporter de deux manières différentes; elles peuvent passer à distance un peu grande l'une de l'autre, sans choc, en se déviant seulement par attraction suivant une courbe très allongée ou, au contraire, se rapprocher assez pour que le choc produise un angle vif dans la trajectoire; dans le premier cas l'échange de vitesse est faible, comme la déviation; il est au contraire considérable dans le second cas. Les deux cas sont séparés par une certaine valeur de la distance b du centre d'une molécule à l'asymptote de la trajectoire relative de l'autre, telle que les molécules s'effleurent. Si Ω est la vitesse relative au loin, le principe des aires donne la vitesse $\frac{b\Omega}{2R}$ au moment de la distance minimum égale à $2R$. L'accroissement de force vive

$$\frac{m\Omega^2}{2}\left(\frac{b^2}{4R^2}-1\right)$$

est égal au travail A de l'infini à la distance d'attraction fixe $2R$; on a donc

$$\frac{m\Omega^2}{2}\left(\frac{b^2}{4R^2}-1\right)=A,$$

d'où

$$b^2=4R^2\left(1+\frac{A}{\frac{m\Omega^2}{2}}\right)$$

ou encore

$$b^2=4R^2\left(1+\frac{C}{T}\right),$$

où C est une constante caractéristique de la molécule.

Dans cette manière de voir, le travail total des attractions, A, importe seul, tant que les parcours libres sont grands par rapport au domaine d'attraction moléculaire. La distance b est un paramètre qui définit la nature de la rencontre, et peut être employé, au lieu de $2R$,

(1) *Phil. Mag.*, 5e série, t. XXXVI, 1893, p. 507.

pour définir un parcours libre (c'est-à-dire sans choc, quoique comportant encore de faibles déviations)

$$\lambda = \frac{1}{N\,4\pi R^2\left(1+\frac{C}{T}\right)}.$$

Ce parcours libre est d'autant plus long, à égale densité, que la température est plus élevée. C'est bien le sens qui correspond aux phénomènes. L'accord de la formule avec les expériences de viscosité et de diffusion des gaz est beaucoup meilleur que ne le faisait espérer le peu de rigueur du raisonnement [1].

M. Sutherland a publié, depuis 1885, dans le ***Philosophical Magazine***, un grand nombre de Mémoires ingénieux et touffus, d'inégale importance. Un groupe, consacré aux lois d'attraction moléculaire [2], est dominé par l'hypothèse d'une attraction proportionnelle à r^{-4}; malgré l'objection classique relative à l'action des molécules lointaines, cette loi paraît bien coordonner les tensions superficielles, et le deuxième Mémoire du tome XXXVIII contient un Tableau étendu d'après lequel la loi d'action entre molécules différentes serait $\frac{3\alpha_1\alpha_2}{r^4}$, si la loi d'action entre molécules 1 est $\frac{3\alpha_1^2}{r^4}$ et entre molécules 2, $\frac{3\alpha_2^2}{r^4}$. Quant aux relations entre les α et la constitution de la molécule (XXXIX) elles semblent peu précises.

A signaler aussi un groupe de Mémoires sur les gaz à basse pression et le radiomètre [3].

250. Viscosité. — Considérons maintenant un mouvement de translation lent du gaz, dont la vitesse d'ensemble U croît proportionnellement à la distance normale z, et examinons les échanges de quantité de mouvement à travers un élément de surface parallèle à U, et normal à z. Les molécules qui traversent cet élément arrivent de toutes les directions et de diverses distances. En moyenne, celles qui

---

(1) La rigueur est d'ailleurs extrêmement difficile à atteindre; on s'en fera une idée en étudiant le Mémoire de M. Langevin, relatif à la diffusion de matière, pour une loi d'attraction r^{-5} suivie de choc : *Sur un théorème important de la théorie cinétique des gaz* (*Ann. Ch. Phys.*, 1905).

(2) *Gaz et liquides*, t. XXII, 1886, p. 81; t. XXIV, 1887, p. 113-168; t. XXVII, 1889, p. 305; t. XXXV, 1893, p. 211; t. XXXVI, 1893, p. 150 et p. 507; t. XXXVIII, 1894, p. 1 et p. 188; t. XXXIX, 1895, p. 1. — *Solides*, t. XXXII, 1891, p. 31 et p. 215-524.

(3) T. XLII, 1896, p. 373-476; t. XLIII, 1897, p. 11-83; t. XLIV, 1897, p. 52.

proviennent d'un même côté arrivent d'un hémisphère de rayon λ, et apportent le même excès de vitesse d'ensemble, que si elles avaient subi leur dernier choc sur cet hémisphère; chaque molécule traverse obliquement l'élément avec sa grande vitesse d'agitation moyenne Ω. Au total, la moyenne est la même que si l'on regardait les molécules du gaz comme partagées en six groupes égaux, animées de mouvements rectangulaires et opposés deux à deux. Un seul de ces groupes traverse normalement l'élément de surface, et a, par conséquent, subi son dernier choc à la distance normale λ. Le groupe qui traverse de bas en haut enlève à la partie inférieure du gaz une quantité de mouvement $\frac{1}{6}N\Omega\lambda\left(-m\frac{\partial U}{\partial z}\right)$ par unité de temps et de surface; le groupe égal qui traverse en sens opposé lui apporte $\frac{1}{6}N\Omega\lambda\left(+m\frac{\partial U}{\partial z}\right)$. Au total, la quantité $-\frac{1}{3}Nm\Omega\lambda\frac{\partial U}{\partial z}$ est transportée dans le sens des z positifs par unité de temps et de surface. On a donc, en se reportant à la définition du coefficient de frottement (Chap. II),

$$\mu = +\frac{1}{3}Nm\Omega\lambda = \frac{1}{3}\rho\Omega\lambda.$$

Une évaluation rigoureuse des diverses moyennes multiplierait cette expression pour un coefficient numérique, peu différent de l'unité.

Le théorème du tétraèdre (n° 18) est applicable aux quantités de mouvement, et permet d'établir la forme générale des actions de viscosité.

La seule réserve importante est que la variation de la vitesse d'ensemble U soit sensiblement uniforme dans une étendue notablement supérieure au chemin moyen λ sous la densité du gaz étudié.

251. Loi de la température. — Un caractère général du parcours libre dans les gaz est d'être en raison inverse de N, c'est-à-dire de la densité pour un même gaz; le produit $\rho\lambda$ ne dépend que de la température; cela résulte de ce que la loi d'action mutuelle de deux molécules est caractérisée par ces deux molécules seules, et indépendante de la présence des autres molécules *éloignées*. *La viscosité ne dépend que de la température; elle est indépendante de la densité.* C'est le résultat paradoxal et certain sur lequel j'ai déjà appelé l'attention (n° 189).

Nature des molécules.	Viscosité.	Loi de la température.
Molécules sphériques........	$\frac{1}{3}\frac{m}{4\pi R^2}\Omega$	$T^{\frac{1}{2}}$
Point répulsif r^{-n}...........	$\frac{1}{3}\frac{m\Omega}{4\pi R_0^2}\left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^{\frac{4}{n-1}}$	$T^{\frac{1}{2}+\frac{2}{n-1}}$
Point répulsif r^{-5} (Maxwell)..	$\frac{1}{3}\frac{m\Omega}{4\pi R_0^2}\cdot\frac{\Omega}{\Omega_0}$	T^1
Molécule sphérique attractive (Sutherland)..............	$\frac{1}{3}\frac{m}{4\pi R_0^2}\frac{\Omega}{1+\frac{2A}{m\Omega^2}}$	$\frac{T^{\frac{3}{2}}}{T+C}$

C'est cette dernière loi que les expériences les plus précises et les plus étendues ont pleinement confirmée. La figure 86, reproduction d'une figure de M. Breitenbach, donne l'allure de ces diverses lois de variation du chemin moyen (L), en fonction de la température de — 273° à + 300°.

En particulier, M. Sutherland a appliqué sa théorie aux mélanges [1], et a montré qu'elle fournit l'explication du fait singulier observé par Graham, confirmé par Maxwell et Puluj, et plus récemment par Breitenbach (n° 240), que la viscosité d'un mélange d'hydrogène et de gaz carbonique, ou mieux d'hydrogène et d'éthylène, passe par un *maximum* pour certaines proportions du mélange. Je me borne à citer la formule qui représente bien toutes les expériences de Graham à température constante sur des mélanges deux à deux en proportions variées d'hydrogène, air, oxyde de carbone, gaz carbonique, oxygène, azote et éthylène; elle ne contient que les constantes relatives à chaque gaz pris isolément, les proportions du mélange en volume, la température et une constante C_{12} relative à l'énergie d'attraction mutuelle d'une molécule 1 et d'une molécule 2 au contact

$$\mu = \frac{\mu_1}{1+\beta_1\frac{N_2}{N_1}} + \frac{\mu_2}{1+\beta_2\frac{N_1}{N_2}},$$

avec

$$\beta_1 = \left(\frac{2m_2}{m_1+m_2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{T+C_{12}}{T+C_{11}} \left[1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}\times\frac{T+C_{11}}{T+C_{22}}}\right]^2$$

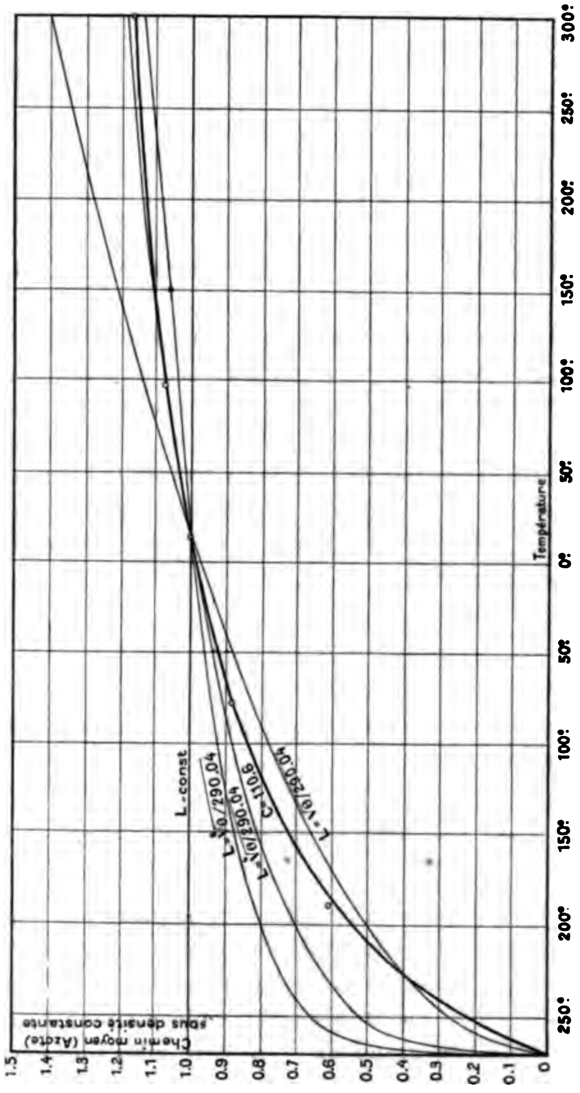
et l'expression symétrique pour β_2.

---

[1] *Phil. Mag.*, t. XL, 1895, p. 421. La formule n'est établie que moyennant une hypothèse supplémentaire.

ıcore faut-il ajouter que Sutherland a employé pour le calcul les ırs des C_{11}, C_{22} et C_{12}, qu'il avait tirées [1] des coefficients de

Fig. 86.



Légende : Le chemin moyen de l'azote en fonction de la température, d'après la théorie (choc ou répulsions diverses) et d'après la loi de Sutherland (courbe C = 110,6) entièrement d'accord avec l'expérience.

sion observés par Obermayer, en particulier 53 pour H_2 et 84 Az_2.

Phil. Mag., décembre 1893, juillet 1894.

252. Dimensions des molécules (¹). — La vitesse d'agitation moléculaire Ω est égale à $\sqrt{\frac{3p}{\rho}}$ d'après la théorie cinétique. Le chemin moyen est donc

$$\lambda = \frac{3\mu}{\rho\Omega} = \frac{3\mu}{\sqrt{3p\rho}},$$

et l'on a

$$4NR^2 = \frac{\sqrt{3p\rho}}{3\pi\mu}\,\frac{T}{T+C}$$

à un coefficient numérique près, peu différent de l'unité, commun à tous les gaz.

On a utilisé ces formules de deux manières différentes pour l'étude des dimensions moléculaires (²). Tout d'abord, on supposait le facteur de Sutherland égal à 1, et l'on cherchait à se faire une idée de la grandeur absolue de R; pour cela, on a remarqué que le volume total des molécules est certainement plus petit que le volume qu'elles occupent à l'état solide ou liquide. Soient Δ la densité du liquide, D la distance de centre à centre des molécules, rangées en ordre cubique par exemple, on a

$$ND^3 = \frac{\rho}{\Delta},$$

et D est certainement plus grand que 2R, mais probablement pas beaucoup. On a donc

$$\frac{\rho}{\Delta}\,\frac{3\pi\mu}{\sqrt{3p\rho}} = \frac{D^3}{4R^2} > 2R.$$

Les valeurs 2R', obtenues en remplaçant l'inégalité par une égalité, sont voisines de 10^{-7} centimètres; elles diffèrent peu malgré d'énormes différences de masses moléculaires. Ce sont celles qu'on trouve d'ordinaire dans les tables de dimensions moléculaires; elles fixent exactement un ordre de grandeur. Toutefois, elles sont encore trop

---

(¹) Les considérations développées dans toute la fin de ce Chapitre ont fait l'objet d'une Communication à la Société de Physique (18 janvier 1907).

(²) *Voir* « Les dimensions des atomes » dans *Conférences et Allocutions de Lord Kelvin*, et tous les travaux récents sur les ions et les électrons, dans *Ions, Électrons et Corpuscules*, par ABRAHAM et LANGEVIN. Paris, Gauthier-Villars.

grandes, et surtout elles ne sont pas comparables entre elles, car le nombre N que l'on déduit de ces valeurs de $2R$ n'est pas le même pour les différents gaz pris à l'état normal.

Pour avoir des valeurs comparables adoptons donc une valeur commune de N, conformément à la théorie cinétique et à la loi d'Avogadro et d'Ampère, de préférence la valeur

$$N = 4.10^{19} \text{ par centimètre cube,}$$

à laquelle conduisent les expériences sur les ions, qui paraît bien être la plus probable. Nous obtiendrons ainsi le Tableau de la page suivante, dans lequel $2R_T$ désigne le diamètre apparent à la température T, tel qu'on l'obtient en faisant le facteur de Sutherland égal à 1, tandis que $2R_0$ désigne le diamètre impénétrable tel qu'on l'obtient en tenant compte du facteur de Sutherland avec les valeurs de C en regard. L'incertitude, faible d'ailleurs, sur le nombre N, influe de même sur toutes les valeurs, de sorte que tous les rapports des $2R_T$ et $2R_0$ sont exacts :

$$2R_0 = \sqrt{\frac{T}{T+C}\,\frac{1}{\pi\lambda N}},$$

$$2R_T = \sqrt{\frac{1}{\pi\lambda N}}.$$

Dans le Tableau suivant, les valeurs de C sont accompagnées d'une initiale.

(O) indique les valeurs que Sutherland a déduites des expériences de viscosité d'Obermayer, effectuées dans un intervalle de température de 50° seulement (SUTH., *Phil. Mag.*, t. XXXVI, 1893, p. 516-517). La valeur 110 pour l'azote est adoptée par comparaison de celles de l'air 113, et de l'oxygène 127, au lieu de 84 que donnent les expériences mêmes.

(H) indique les valeurs que Sutherland a tirées des expériences étendues d'Holman (*loc. cit.*, p. 514) 113 et 277.

(Br), (S), (Bs) indiquent les valeurs précises obtenues par Breitenbach (n° **225**), Schültze (n° **226**) et Bestelmayer (n° **232**).

Les valeurs entre parenthèses sont tirées, par Sutherland, d'une forme particulière de la loi de compressibilité et de la viscosité à 0°, très incertaines à mon avis.

Les valeurs de $2R_0$ sont tirées des valeurs les plus sûres de C.

Gaz.	λ en 10^{-7} cm.	$2R_T$ (273°) en 10^{-7} cm.	C en degrés centigrades	$2R_0$ en 10^{-7} cm.
Hélium............	240	0,182		
Argon.............	99	0,283	169,9 (Sh)	0,222
Vapeur de mercure.	34	0,483		
Hydrogène.........	182	0,208	53 (O); 79; 71,7 (Br)	0,185
Oxygène...........	100	0,278	127 (O)	0,231
Azote.............	94	0,290	84 (O); 110; 110,6 (Bs)	0,244
Air...............			113 (H); 119,4 (Br)	
Oxyde de carbone..	92	0,294	100 (O)	0,251
Oxyde d'azote.....	94	0,290		
Acide chlorhydrique	71	0,334	(256)	
Chlore............	46	0,415	(410)	
Vapeur d'eau......	71	0,334		
Gaz carbonique....	63	0,355	277 (H); 239,7 (Br)	0,259
Protoxyde d'azote..	61	0,361	260 (O)	0,259
Hydrogène sulfuré .	60	0,364	(395)	
Acide sulfureux....	47	0,410	(397)	
Ammoniaque	71	0,334	(352)	
Cyanogène.........	40	0,445	(461)	
Éthylène..........	52	0,390	272 (O); 225,9 (Br); (215)	0,288

Autant qu'on en peut juger par le petit nombre de résultats, les diamètres réels $2R_0$ sont beaucoup moins différents que les diamètres apparents, malgré la grande différence de complexité des molécules.

Le Tableau suivant contient, pour les mélanges gazeux, les C_{12}, tirés par Sutherland des expériences de viscosité de Graham ou de diffusion d'Obermayer, et les sommes des rayons réels tirés du Tableau précédent :

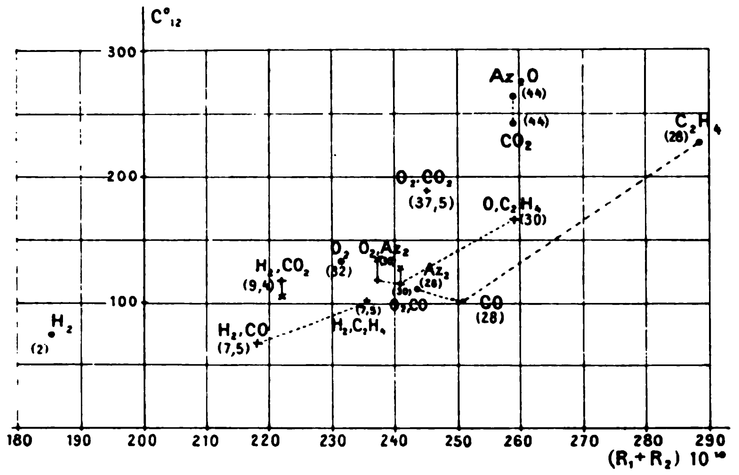
$\sqrt{M_1 M_2}$.		C_{12}. Obermayer.	C_{12}. Graham.	$R_1 + R_2$ en 10^{-7} cm.
7,5	Oxyde de carbone. Hydrogène.. ..	»	70	0,210
8.0	Oxygène. Hydrogène.............	100	»	0,200
7,5	Éthylène. Hydrogène.............	»	102	0,233
9,4	Gaz carbonique. Hydrogène.......	106	114	0,219
30	Azote. Oxygène..................	136	117	0,232
30	Oxyde de carbone. Oxygène	124	113	0,241
30	Éthylène. Oxygène...............	»	165	0,263
37,5	Gaz carbonique. Oxygène.........	»	187	0,249
44	Gaz carbonique. Protoxyde d'azote.	380	»	0,259

La comparaison des valeurs des C avec $2R_0$ ou $R_1 + R_2$, c'est-à-dire de l'énergie due à l'attraction en fonction de la distance, sans tenir compte des masses, ne manifeste pas grande régularité appa-

rente, comme on en peut juger par la figure 87, où les distances sont portées en abscisses et les énergies C en ordonnées.

Malheureusement, le peu d'étendue des variations de température (50°) et la difficulté des expériences de diffusion, ôtent beaucoup de valeur aux nombres d'Obermayer, dont l'erreur relative peut atteindre $\pm\frac{1}{5}$. L'incertitude de la théorie laisse planer les mêmes doutes sur les nombres tirés des expériences de Graham.

Fig. 87.



A côté de chaque point ont été inscrites entre parenthèses les racines carrées du produit des poids moléculaires; si la loi d'action était de la forme $M_1 M_2 f(r)$, avec une fonction f commune à tous les corps, on pourrait amorcer un réseau régulier de lignes d'égal $M_1 M_2$ coordonnant tous les points.

Les mélanges sans hydrogène présentent une certaine régularité, mais les mélanges qui contiennent de l'hydrogène montrent que cela est illusoire; le point éthylène-hydrogène (7,5) est tout proche des points azote-oxygène et oxyde de carbone-oxygène (30); même en faisant toute réserve sur l'incertitude relative à ce point particulier, aucun ordre certain n'apparaît ainsi.

On peut chercher à déterminer le diamètre moléculaire par d'autres considérations que la viscosité ou la diffusion, et il est remarquable que, soit en partant du pouvoir inducteur spécifique ([1]), soit en par-

([1]) DORN, *Wied. Ann.*, t. XIII, 1881, p. 378.

tant des indices de réfraction [1], les diamètres trouvés sont presque rigoureusement les $\frac{7}{10}$ des diamètres réels du Tableau de la page 111.

La difficulté de coordination ne provient donc pas d'erreurs notables sur les distances, mais bien plutôt de très grosses incertitudes sur les C, peu de gaz ayant été étudiés dans une étendue de température suffisante. En outre, les données se rapportent à un domaine mixte où l'attraction et la répulsion se combattent, et il n'y a aucune certitude qu'elles dépendent des masses de la même façon, quand bien même chacune de ces forces serait liée à une propriété spécifique de la molécule d'une manière indépendante de sa matière.

253. Remarques sur les domaines impénétrables. — Essayons néanmoins de tirer de ces résultats quelques indications directrices pour les recherches ultérieures.

Remarquons d'abord combien peu varient les rayons des domaines impénétrables. Ces rayons ne sont pas fonction du poids moléculaire, car l'azote, l'oxyde de carbone et l'éthylène, qui ont même poids moléculaire 28, ont des diamètres 244, 251 et 288.10^{-10} centimètres. Ces rayons croissent avec la complexité de la molécule, mais aucune loi ne se dégage ; en particulier, il est manifeste pour l'oxyde de carbone et l'acide carbonique que la différence des volumes impénétrables est beaucoup plus petite que le volume impénétrable de l'atome d'oxygène ; de même le volume impénétrable du protoxyde d'azote n'est que $\frac{5}{6}$ de la somme des volumes impénétrables de l'azote et de l'oxygène qui le composent.

Ces volumes impénétrables ne jouissent donc pas des propriétés additives que les chimistes leur attribuent souvent par comparaison avec des volumes matériels. Ces volumes sont définis par des conditions dynamiques, et ils ne sont impénétrables que pour des molécules complètes et lentes ; on peut supposer que la matière qui constitue les molécules ne se trouve que dans la partie centrale de ces domaines impénétrables, et que les actions qui s'exercent au contact des domaines impénétrables sont encore des résultantes d'actions atomiques lointaines.

254. Recherche d'une loi d'attraction moléculaire. — Comment la loi des actions moléculaires se raccorde-t-elle à la loi newtonienne de la gravitation universelle? C'est une question que les physiciens

---

[1] Exner, *Wien. Ber.*, t. XCI, 1885, p. 850. — *Repert.*, t. XXI, p. 446. — Guye, *Arch. gén.*, t. XXIII, p. 197.

ne peuvent éluder et sur laquelle la plupart des phénomènes ne donnent que des renseignements confus. Un point semble néanmoins résulter de la variété des propriétés superficielles et élastiques des corps : s'il existe une loi universelle d'action entre atomes quelconques, applicable aux distances moléculaires et isotrope au moins en moyenne, la fonction universelle de la distance *n'a pas* pour coefficient le produit des masses newtoniennes des atomes. C'est ce qui résulte avec la dernière évidence de la distribution des points de la figure 87, entre lesquels il est impossible de tracer un réseau de lignes d'égales masses moléculaires. Le facteur caractéristique des deux atomes réagissants dépend donc d'autre chose que des masses moléculaires, et il est naturel de se demander s'il est de la forme $K_1 K_2$, K_1 et K_2 caractérisant chacun l'un des atomes. C'est là une question qui mérite une étude approfondie, mais que l'insuffisance actuelle des documents ne permet pas de trancher; je me bornerai ici à une simple indication. Pour dissocier les deux facteurs du produit $K_1 K_2$, et se faire une idée de la loi de la distance, il est commode de représenter les résultats de la figure précédente, en prenant pour ordonnées y les logarithmes des C_{12}. On aurait alors

$$y_{12} = \log C_{12} = \log K_1 + \log K_2 + \log f(r_{12}),$$

s'il n'y avait pas quelques réserves au sujet de l'origine des distances dans chaque cas particulier. Deux corps différents fourniraient trois équations :

$$y_{11} = \log C_{11} = 2\log K_1 + \log f(r_{11}),$$
$$y_{22} = \log C_{22} = 2\log K_2 + \log f(r_{22}),$$
$$y_{12} = \log C_{12} = \log K_1 + \log K_2 + \log f(r_{12}),$$

avec

$$2r_{12} = r_{11} + r_{22}.$$

Éliminant les $\log K$, on en tire

$$y_{11} + y_{22} - 2y_{12} = \log f(r_{11}) + \log f(r_{22}) - 2\log f(r_{12}),$$

d'où approximativement

$$\frac{y_{11} + y_{22} - 2y_{12}}{\left(\frac{r_{22} - r_{11}}{2}\right)^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}[\log f(r)].$$

La combinaison du premier membre, évaluée avec divers couples de molécules, devrait donc montrer une certaine régularité. Malheureusement l'incertitude sur les C_{12} est encore énorme ($\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{10}$ de leur valeur), en sorte que le signe même du premier membre n'est pas sûr.

principalement pour les mélanges qui contiennent de l'hydrogène ; moindre assurément, mais encore considérable, est l'incertitude sur le dénominateur $r_{22} - r_{11}$. Quoi qu'il en soit, les résultats sont réunis dans le Tableau suivant :

r_{12} (10^{-10}cm).	Gaz.		$\frac{\partial^2}{\partial r^2}[\log f(r)]$.
218	H^2	CO	0,000049
222	H^2	CO^2	0,000022
236	H^2	C^2H^4	0,000018
237	Az^2	O^2	entre 0 et 0,000071
241	O^2	CO	— 0,000005
245	O^2	CO^2	— 0,000077
259	O^2	C^2H^4	+ 0,000007?

La régularité de variation est certainement meilleure que l'incertitude des données ne pouvait le faire prévoir et, par conséquent, très encourageante. Par des mesures étendues, dont les plus urgentes seraient des mesures de diffusion des gaz dans un très large intervalle de température, il semble donc possible d'atteindre une loi d'action moléculaire universelle.

255. **Recherche des coefficients atomiques.** — Resterait à déterminer les coefficients K_1, K_2, ou du moins les rapports de ces coefficients à l'un d'entre eux pris pour unité, ou, ce qui revient au même, les différences de leurs logarithmes. Malheureusement ces différences ne peuvent pas être isolées, car on a

$$y_{22} - y_{11} = 2\log K_2 - 2\log K_1 + \log f(r_{21}) - \log f(r_{11}),$$

et le Tableau précédent, qui ferait connaître les différences secondes de $\log f(r)$, laisse inconnue la dérivée première en un point précis pris pour origine ; il reste donc, dans le rapport des K_1, K_2 à l'un d'entre eux, un facteur indéterminé.

Si les données étaient plus précises on pourrait lever l'indétermination en admettant, conformément aux idées newtoniennes, que l'action d'une molécule est la résultante des actions de ses atomes ; alors le coefficient K d'une molécule serait la somme de ceux de ses atomes.

Prenons pour unité celui d'un atome d'oxygène, il n'y a guère d'ambiguïté pour le carbone et l'azote : les valeurs

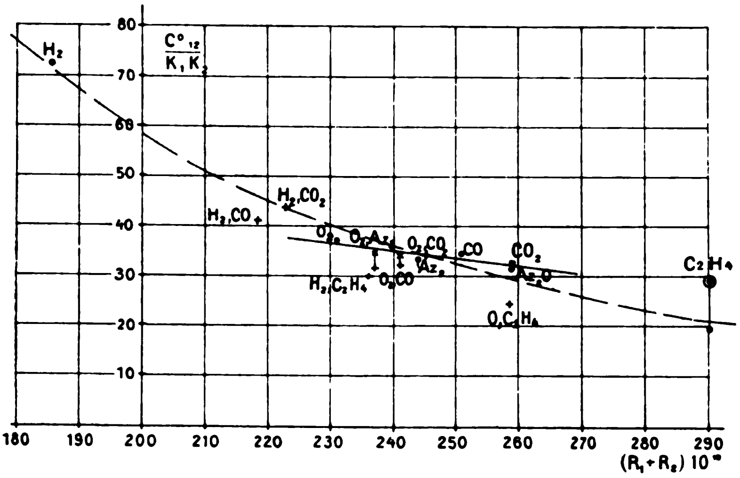
$$K_O = 1, \qquad K_{Az} = 0,9, \qquad K_C = 0,70,$$

qui donnent par addition

$$K_{O^2} = 2, \qquad K_{Az^2} = 1,8, \qquad K_{Az^2O^2} = 2,8, \qquad K_{CO} = 1,7, \qquad K_{CO^2} = 2,7,$$

groupent bien toutes les valeurs des $C_{12} : K_1 K_2$ autour de la droite tracée d'un seul trait (*fig.* 88). Regardant cette portion de courbe comme bien définie, on serait conduit à adopter pour l'éthylène un

Fig. 88.



point voisin de celui qui est entouré d'un petit cercle sur la figure, d'où l'on tirerait

$$K_{C_2H_4} = 2,6,$$

et par différence

$$K_H = 0,3;$$

le point O^2, C^2H^4 se confondrait avec le point Az^2O; mais les points (H^2, C^2H^4), (H^2, CO^2), (H^2, CO), (H^2) occuperaient les positions très élevées (66, 71, 68, 200) qui semblent bien être très en dehors de la courbe, et qui n'ont pas été marquées sur la figure. Les points marqués correspondent à

$$K_H = 0,5,$$

et par suite

$$K_{C^2H^4} = 3,4.$$

L'allure de la courbe en traits interrompus est certainement acceptable, et groupe assez bien tous les points observés.

Je rappelle que les seules valeurs bien connues des C sont celles de H^2, Az^2, CO^2 et C^2H^4. Il serait donc actuellement illusoire de pousser plus loin la discussion. Un caractère paraît pourtant certain, parce qu'il s'est rencontré spontanément avec toutes les valeurs des K, sensiblement différentes, obtenues par divers groupements

des points de la courbe, c'est la diminution du travail $\frac{C_{12}}{K_1 K_2}$ quand la distance augmente.

256. Conclusions provisoires. — En résumé, on peut regarder comme probables les propriétés dont l'énoncé suit :

Il existe une loi universelle d'*attraction* entre atomes aux distances moléculaires. La dérivée seconde de $\log C$ par rapport à la distance est petite et décroissante (C est la constante de Sutherland, égale et de signe contraire à l'énergie mutuelle de deux molécules au contact, évaluée en degrés centigrades).

Le coefficient de la loi universelle d'attraction est le produit de deux facteurs, dont chacun dépend d'une seule molécule.

Le facteur de chaque molécule est la somme des facteurs dus aux atomes composants.

Ces facteurs sont beaucoup moins différents que les poids atomiques, et sans relations avec ceux-ci.

Ces conclusions sont encore bien modestes, mais elles sont tirées de l'expérience par une voie directe et dont on peut suivre toutes les étapes ([1]). C'est ce que les mesures de viscosité et de diffusion dans une grande étendue de température permettent seules d'atteindre jusqu'à présent, et ce qui leur donne une importance théorique exceptionnelle.

([1]) On n'en pourrait pas dire autant de la plupart des tentatives des physico-chimistes. En l'absence de résultats précis assez nombreux, on calcule les données dont on a besoin en appliquant des règles établies sur un petit nombre d'exemples, et qui ne sont même pas toujours exactes au dixième, et, après quelques exercices de ce genre et quelques changements de point de vue, il est impossible au lecteur de savoir s'il reste un lien quelconque entre les conclusions et les données. Dans la série de Mémoires dont nous avons donné plus haut la liste, M. Sutherland est parti de l'idée préconçue que l'énergie mutuelle de deux atomes de masses m_1, m_2 est

$$-A\frac{m_1 m_2}{r^3},$$

et a prétendu d'abord en tirer toutes les propriétés des liquides, des vapeurs et des gaz, purs ou mélangés, malgré l'objection bien connue à la puissance — 3. Puis il a dû reconnaître que le facteur A n'est pas une constante universelle, et en conséquence, dans ses derniers Mémoires, il remplace $A m_1 m_2$ par $K_1 K_2$, et utilise toutes les propriétés et une partie des énoncés de ses Mémoires antérieurs pour établir la légitimité de la forme $K_1 K_2$ et la loi de formation de chacun des coefficients K. Je n'affirme pas qu'il y ait des pétitions de principes; mais j'affirme que je n'en sais rien, tant sont enchevêtrées les considérations théoriques, les approximations dans les formules, les énoncés de résultats assez grossiers et l'utilisation de ces résultats de proche en proche.

CHAPITRE III.

LIQUIDES. — ESSAI DE THÉORIE CINÉTIQUE.

257. Liquides ([1]). — Lorsque les molécules du fluide sont très serrées, le même mécanisme général conduit à une formule différente, comme nous allons voir, parce que le parcours libre moyen est petit par rapport au diamètre moléculaire. A chaque choc la quantité de mouvement d'une molécule, qui était attribuée au centre de gravité de cette molécule, est en partie transportée à la deuxième molécule et attribuée à son centre de gravité. Le point d'application de cette quantité de mouvement se déplace donc dans l'espace par deux mécanismes : 1° entre les chocs, par le déplacement du centre de la molécule mobile; 2° au moment du choc, par transport du centre d'une

([1]) On consultera avec intérêt l'ensemble des Mémoires de M. Jæger dans les *Sitzungsberichte de Vienne*, malgré l'insuffisance du point de vue exclusivement cinétique de la théorie :

1890 (99). — *Tensions de vapeur.*

Vitesse des molécules liquides.

Volume spécifique des vapeurs saturantes et des liquides saturants.

1891 (100). — *Tension superficielle et température.*

Tension superficielle des solutions.

Chaleur de vaporisation.

1892 (101). — *Tension superficielle des solutions non aqueuses.*

Stœchiométrie des solutions.

Théorie des liquides.

Tension superficielle du mercure et température.

1893 (102). — *Théorie cinétique du frottement interne des liquides.*

Conductibilité thermique des liquides.

1894 (103). — *Frottement interne des solutions*, et l'article de l'*Encyclopédie physique*, édition Winkelmann (t. II, Part. II).

Voir aussi les recherches de M. Dieterici sur l'équation d'état :

Wied. Ann., t. LXVI, 1898.

Et celles de M. Voigt sur la vaporisation.

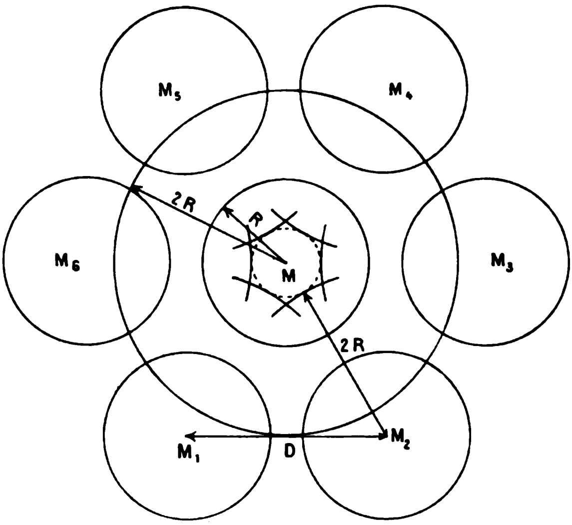
Göttingen-Nachr., 1896-1897.

Ces travaux sont résumés dans les Chapitres VI, VII et VIII du Traité de W.-P. Boynton : *Applications of the kinetic theory to gases*, ... (1904).

molécule au centre d'une autre. Ce second mode de transport, négligeable dans les gaz, est prépondérant dans les liquides.

Soit D la distance moyenne des centres des molécules dont le rayon est R. Si l'on trace la sphère de rayon 2R autour du centre d'une molécule (*fig.* 89), et si l'on immobilise celles qui l'entourent, on voit que le centre de la molécule peut se mouvoir à l'intérieur

Fig. 89.



$M_1, \ldots, M_6$ molécules fixes.
M molécule mobile dans l'espace, limitée par des sphères de rayon 2R, tracées autour des molécules fixes.
C'est cet espace polyédrique que l'on assimile à la sphère inscrite (....) lorsque les molécules sont très serrées.

d'une sphère de rayon D — 2R sans choc et même un peu au delà dans certaines directions, mais fort peu. Pour que la molécule centrale puisse sortir, il faut que, par le resserrement d'un grand nombre de molécules voisines, il se trouve un passage disponible entre deux molécules; cela sera très rare lorsque D est notablement inférieur à $2R\sqrt{3}$, distance pour laquelle il y aurait une direction unique de passage avec contact rasant entre trois molécules fixes; la diffusion de matière sera très difficile.

La diffusion de mouvement bénéficie, au contraire, du transport de centre à centre au moment du choc. Nous supposerons que 2R est le diamètre impénétrable d'une molécule; car les molécules restent à très petite distance les unes des autres, et se meuvent dans un champ

de forces attractives très faibles par compensation due à la grande densité; cela revient à supposer que la concentration de Sutherland, qui exige un assez long parcours libre, ne peut pas se produire dans un liquide, loin du point critique; toutefois, nous ignorons encore avec quelle rapidité varie l'attraction, et si les courbures de trajectoire et les variations de vitesse entre deux chocs sont réellement négligeables à l'état liquide.

258. Viscosité. — Pour déterminer la viscosité il faut évaluer la quantité de mouvement qui traverse l'unité de surface en une seconde; elle se compose de deux parties : 1° celle que transportent les molécules dont le centre passe d'un côté à l'autre de la surface; 2° celle qui saute du centre d'une molécule au centre d'une autre, situés de part et d'autre de la surface, au moment où ces deux molécules se choquent.

D'ailleurs, dans l'espace disponible, chaque molécule se meut sensiblement en ligne droite d'un mouvement uniforme, car les molécules sont assez rapprochées pour que le champ de force dû à leurs actions mutuelles soit très petit, sauf près de la surface libre; en outre, la vitesse d'agitation est la même que celle d'une molécule de vapeur à la même température, au point de vue de la théorie cinétique, et l'énergie potentielle très différente correspond exactement à la chaleur de vaporisation.

Le parcours libre du centre est évidemment [1] à peu près $(D - 2R)$, et le nombre de chocs n d'une molécule contre les autres est $\frac{\Omega}{D - 2R}$ par unité de temps.

Nous définissons toujours la vitesse d'une couche mince par la quantité de mouvement moyenne des molécules dont le centre est dans cette couche. Au moment du choc les molécules échangent leurs vitesses; la molécule qui subit un choc contre une autre molécule prend donc la vitesse moyenne de la couche dans laquelle se trouve le centre de cette molécule; c'est à une distance égale à la distance moyenne des centres D, que les molécules qui traversent l'élément de surface ont emprunté leur excès de vitesse.

Cela étant, $\frac{1}{6}N.\Omega\,dt$ molécules passent encore, par unité de sur-

---

(1) $\frac{3}{4}(D - 2R)$ si toutes les directions sont également probables à l'intérieur de la sphère en pointillé.

face, de bas en haut pendant le temps très court dt, et autant de haut en bas; elles transportent au total un excès

$$\frac{1}{3}N.\Omega.Dm\frac{\partial U}{\partial z}$$

de quantité de mouvement de haut en bas par unité de surface et par seconde.

Pour évaluer la seconde partie, remarquons que, au moment du choc, les centres des sphères sont à une distance $2R$; si tous les chocs se produisaient suivant la normale à l'élément de surface, les sphères situées d'un côté qui peuvent subir un choc de la part de sphères situées de l'autre côté de l'élément de surface auraient leurs centres dans une couche d'épaisseur $2R$. Elles seraient au nombre de $N.2R$ par unité de surface; elles gagneraient, à chaque choc, une quantité de mouvement $m\frac{\partial U}{\partial z}2R$. Chaque molécule de la couche inférieure reçoit en réalité $\frac{1}{2}n\,dt$ chocs, en dt, provenant de l'hémisphère supérieur; nous pouvons encore admettre que l'effet de tous ces chocs inégalement inclinés est le même que celui d'un tiers d'entre eux seulement dans la direction normale. La quantité de mouvement reçue par la couche inférieure est alors

$$\frac{1}{3}N.2R\times m\frac{\partial U}{\partial z}2R\times\frac{1}{2}\frac{\Omega}{D-2R}.$$

Le second mode de transport [1] fait passer une quantité de mouvement

$$\frac{1}{6}Nm.4R^2\frac{\Omega}{D-2R}\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Additionnant les deux effets, la viscosité est

$$\mu=\frac{1}{3}Nm.\Omega.\left(\alpha D+\beta\frac{2R^2}{D-2R}\right),$$

[1] Jæger ne fait intervenir que ce second mode de transport; en outre, il ne précise pas la relation entre la vitesse d'agitation u et la température; il aboutit à

$$\mu=\frac{1}{(6\pi^2)^{\frac{1}{3}}}\frac{\rho u}{3}\frac{4R^2}{D-2R}$$

(en employant les notations du texte); le coefficient numérique, $\frac{1}{1,94}$ du nôtre, dépend de la manière de faire les moyennes.

en introduisant deux coefficients numériques α et β, peu différents de l'unité, les mêmes pour tous les liquides, pour tenir compte de tous les éléments négligés dans notre évaluation rapide des effets moyens.

Dans cette formule, $2R$ représente le diamètre impénétrable d'une molécule. Un peu loin du point critique, l'excès $D - 2R$ est certainement petit, par exemple de l'ordre du dixième au centième de $2R$, le second terme de la viscosité est le plus important; la variation de $D - 2R$ en fonction de la température est dix à cent fois plus rapide que celle de D, comparable ou supérieure à celle de Ω ou $\sqrt{T}$. La viscosité des liquides décroît donc quand la température s'élève, résultat conforme à l'observation.

259. Importance relative des termes. — Bien au-dessous du point critique la compressibilité est si faible qu'on peut la négliger.

Posons donc

$$Nm = \rho = \rho_0(1 - 3\gamma t), \qquad D = D_0(1 + \gamma t),$$

γ étant le tiers du coefficient de dilatation moyen du liquide; entre des limites de température d'une cinquantaine de degrés, on a, en supposant $\alpha = \beta = 1$,

$$D + \frac{2R^2}{D - 2R} = \frac{D_0^2 - 2R.D_0 + 2R^2 + 2D_0(D_0 - R)\gamma t}{D_0 - 2R + D_0\gamma t}.$$

Posons encore

$$\frac{D_0^2 - 2R.D_0 + 2R^2}{2D_0(D_0 - R)}\,\frac{1}{\gamma} = t_1, \qquad \frac{D_0 - 2R}{D_0\gamma} = t_2,$$

t_1 et t_2 sont deux températures auxiliaires positives, puisque $D - 2R$ est positif. On a approximativement

$$\mu = \mu_0\left(1 + \frac{t}{2.273}\right)(1 - 3\gamma t)\frac{t + t_1}{t + t_2},$$

$$\mu = \left(\mu_0\frac{t_2}{t_1}\right)[1 + (0,0183 - 3\gamma)t]\frac{t + t_1}{t + t_2}.$$

Pour la plupart des liquides, γ est de l'ordre de $0,0005$, $\frac{1}{\gamma}$ est environ 2000°. Pour que t_1 et t_2 jouent un rôle sensible, il faut

[illegible] D_0 ne dépasse pas 3R, comme le montre le Tableau [illegible]

[illegible]	t_1.	t_2.
[illegible]	$0,5\ \frac{1}{\gamma} = 1000^{\circ}$	$0,01\ \frac{1}{\gamma} = 20^{\circ}$
[illegible]	$0,[illegible]\ \frac{1}{\gamma} = 840$	$0,09\ \frac{1}{\gamma} = 180$
[illegible]	$0,41\ \frac{1}{\gamma} = 820$	$0,33\ \frac{1}{\gamma} = 666$
[illegible]	$0,42\ \frac{1}{\gamma} = 840$	$0,50\ \frac{1}{\gamma} = 1000$
[illegible]	$0,44\ \frac{1}{\gamma} = 880$	$0,67\ \frac{1}{\gamma} = 1340$
[illegible]	$0,46\ \frac{1}{\gamma} = 920$	$0,8\ \frac{1}{\gamma} = 1600$
[illegible]	$0,48\ \frac{1}{\gamma} = 960$	$0,9\ \frac{1}{\gamma} = 1800$
[illegible]	$0,5\ \frac{1}{\gamma} = 1000$	$\frac{1}{\gamma} = 2000$

[illegible] minimum pour $D_0 = (2 + \sqrt{2})R$ ou $D_0 = 1,707 \times 2R$; ce [illegible] est encore très grand.

[illegible] joué par t_1 est donc toujours secondaire, comparable à [illegible] la dilatation cubique du liquide qu'il compense en partie. [illegible] une variation de μ conforme à l'observation, il faut [illegible] est de l'ordre de 350° pour la plupart des liquides, [illegible] descendre même à 250°, c'est-à-dire que $(D_0 : 2R)$ est assez [illegible] compris entre 1,19 et 1,21 et peut descendre à 1,14. [illegible] moléculaire à 0° C. serait donc voisin de 1,7 à 1,8 fois le [illegible] minimum au contact, et pourrait descendre à 1,5 dans les [illegible] laisse encore une assez large marge à la condensation [illegible] à l'état solide et les contractions ultérieures.

[illegible] **simplifiée**. — Admettons qu'il en soit ainsi, la partie [illegible] influence de la température sera représentée par la

$$\mu = \mu_0 \frac{t_2}{\sqrt{T_0}} \frac{\sqrt{T}}{t + t_2}$$

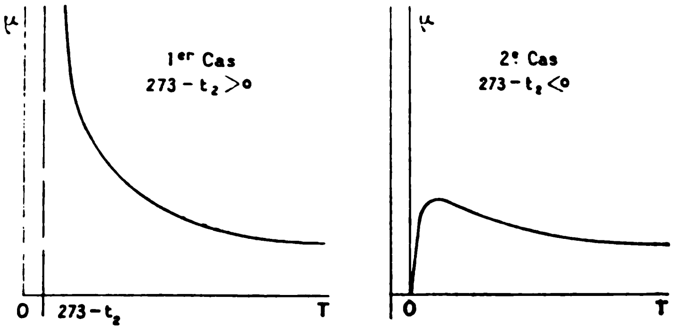
[illegible] Aux températures élevées μ décroît, quelle que

soit la valeur de t_2, à peu près comme $T^{-\frac{1}{2}}$; mais ce domaine est en dehors de l'état liquide.

Aux températures inférieures, l'allure dépend de la valeur de t_2.

Premier cas : $t_2 < 273°$. — μ devient infini pour $t = -t_2$; la décroissance est continue, et rapide au début.

Fig. 90.



Second cas : $t_2 > 273°$. — Le numérateur s'annule avant le dénominateur; la formule indique une viscosité nulle au zéro absolu, croissante, puis passant par un maximum pour $T = t_2 - 273$, avant de décroître très lentement.

De telles valeurs de t_2 ne conviennent que si la décroissance de viscosité est lente à la température ordinaire. On a, en effet,

$$t_{max.} = t_2 - 2 \times 273,$$

$$t_{infl.} = (t_2 - 273)\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) - 273 = 2,155\,t_2 - 3,155 \times 273.$$

Pour $t_2 = 350$, par exemple, on a

$$t_{max.} = -196°, \qquad \mu_{max.} = 1,21\,\mu_0,$$
$$t_{infl.} = -107°, \qquad \mu_{infl.} = 1,13\,\mu_0.$$

261. Formule générale; changement de variables. — Mais une telle simplification de la formule ne peut convenir qu'à un petit intervalle de température. Revenons à la formule générale.

Lorsque les molécules sont arrangées en ordre tétraédrique, comme une pile de boulets, on a (en appelant N le nombre de molécules par unité de volume)

$$N.D^3 = \sqrt{2}.$$

Soit M le poids moléculaire chimique; si les molécules liquides sont restées simples comme celles du gaz, le rapport M : m est un nombre constant pour tous les liquides, et qu'on sait être égal à $4.10^{19} \times 22,32.10^{3}$ ou $0,893.10^{24}$ (en partant de 4.10^{19} molécules par centimètre cube de gaz normal); on a donc

$$D = 2^{\frac{1}{6}}\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{M}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} = 1,19.10^{-8} v_m^{\frac{1}{3}}$$

en posant

$$v_m = \frac{M}{\rho} = V_0.\psi^3.$$

Posons de même

$$2R = 1,19.10^{-8} v_0^{\frac{1}{3}}, \qquad v_0 = V_0 \varphi^3,$$

et rappelons-nous

$$(M\Omega^2)^{\frac{1}{2}} = 15800\sqrt{T},$$

il en résulte

$$\mu = 6,27.10^{-5} M^{\frac{1}{2}} V_0^{-\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{T}}{\psi^3}\left(\alpha\psi + \frac{\beta}{2}\frac{\varphi^2}{\psi - \varphi}\right).$$

Dans cette formule, α et β sont deux constantes universelles, peu différentes de l'unité; φ est une constante propre au liquide étudié, comme son poids moléculaire M, et son volume moléculaire à 0°, V_0; cette constante est le rapport du diamètre d'une molécule à la distance de deux molécules à 0° C., rapport probablement compris entre 0,9 et 1; ψ^3 est le rapport du volume à la température et à la pression de l'expérience, au volume à 0° et 1^{atm}.

262. Viscosité à zéro. — On a donc

$$\mu_0 = 6,27.10^{-5} M^{\frac{1}{2}} V_0^{-\frac{2}{3}} \sqrt{T_0}\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\frac{\varphi^2}{1 - \varphi}\right)$$

ou

$$\mu_0 = 1,036.10^{-3}\frac{\rho_0^{\frac{2}{3}}}{M^{\frac{1}{6}}}\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\frac{\varphi^2}{1 - \varphi}\right),$$

α, β, φ diffèrent peu de l'unité. On a donc une première idée de la viscosité à zéro par la formule

$$\mu_0 = \frac{0,0005}{1 - \varphi}\frac{\rho_0^{\frac{2}{3}}}{M^{\frac{1}{6}}},$$

qui indique que la viscosité varie peu avec le poids moléculaire, mais ne donne pas d'indication sur le sens de la variation, parce que la

densité croît avec le poids moléculaire, et surtout parce que le point de fusion monte, ce qui semble indiquer une diminution rapide de $1 - \varphi$ quand le poids moléculaire augmente.

263. Discussion. Constantes spécifiques. — Pour comparer la formule à l'expérience, nous remarquerons que c'est généralement ψ^3 qui est directement connu par l'étude de la dilatation; on formera la quantité

$$\mu' = 10^8 \frac{\mu\psi^2}{\sqrt{T}},$$

et l'on cherchera à la représenter en fonction de ψ par la formule hyperbolique

$$\mu' = A\left(\psi + \frac{B}{\psi - \varphi}\right).$$

On en déduira les constantes A, B, φ qui conviennent au liquide étudié; puis on en tirera

$$\alpha = \frac{1}{6,27} M^{-\frac{1}{2}} V_0^{\frac{2}{3}} A,$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = 2\frac{B}{\varphi^2},$$

et l'on cherchera si les α et $\frac{\beta}{\alpha}$ ainsi obtenus sont bien des constantes universelles.

Les expériences de Thorpe et Rodger (Livre II, Chap. III) fournissent d'excellents matériaux pour cette étude; mais la discussion en est trop minutieuse et trop étendue pour trouver place ici.

Au point de vue de la discussion des observations, un résultat ressort nettement de cet aperçu théorique : en dehors du facteur $(M\Omega)^{\frac{1}{2}}$ ou $\sqrt{T}$, c'est le volume moléculaire $\frac{M}{\rho}$ qui joue un rôle direct et non la température; et cela est conforme à la remarque de Warburg au sujet de l'anhydride carbonique (n° 166). Pour les liquides, les variables naturelles sont $\mu T^{-\frac{1}{2}}$ et v_m; c'est seulement en fonction de ces variables que les coefficients des formules auront une signification simple et susceptible d'interprétation relative à la constitution moléculaire.

La seule constante spécifique nouvelle à tirer de cette étude, c'est le volume moléculaire lorsque toutes les molécules sont en contact sans aucun mouvement, volume qui intervient déjà dans la discussion des expériences au moyen de la formule de Sutherland.

Si toutefois on se rapproche beaucoup du point critique, il est probable que les distances moléculaires deviendront assez grandes pour que la variation de l'attraction le long du parcours libre produise des inégalités de vitesse et des changements de direction capables de modifier sensiblement la loi de la température; la discussion des approximations légitimes paraît devoir être alors fort difficile.

Enfin, une autre difficulté théorique doit être signalée. On admet, dans tous les calculs relatifs aux gaz, que l'état de deux molécules qui se choquent est, en moyenne, celui des molécules qui occupent le même élément de volume au même instant, même lorsque la direction du mouvement final de l'une des molécules est déterminée. Nous avons fait pour les liquides la même simplification en définissant l'état des molécules qui se choquent par l'état moyen dans la couche où se trouvent leurs centres, ce qui conduit à un échange au moment du choc proportionnel au diamètre moléculaire.

Or, pour le second mode de transport, la direction du choc ne peut varier que dans un hémisphère ainsi que la direction du mouvement des molécules avant le choc; il semble donc que les molécules mises en jeu puissent avoir en moyenne des propriétés plus différentes qu'on ne leur en a attribué; par exemple, les quantités de mouvement échangées au moment du choc pourraient être

$$m\frac{\partial U}{\partial z}[2R+\gamma(D-2R)] \qquad 0<\gamma<1,$$

γ étant un coefficient numérique différent de zéro, indépendant de la nature du fluide et de la densité. De même, dans le premier mode de transports, il est probable que la vitesse transportée par la molécule provient seulement de la distance

$$D-\gamma'(D-2R) \qquad 0<\gamma'<1.$$

Pour qu'il y ait intérêt à comparer à l'expérience la formule réduite qui se déduit de ces aperçus :

$$\mu = 6,27.10^{-5}M^{\frac{1}{2}}V^{\frac{2}{3}}\left[\alpha\psi-\gamma'(\psi-\varphi)+\frac{\beta}{2}\,\frac{(1-\gamma)\varphi^2+\gamma\varphi\psi}{\psi-\varphi}\right]\sqrt{\frac{T}{\psi^3}}$$

il faudrait avoir donné aux raisonnements assez de rigueur pour déterminer à l'avance une partie au moins des constantes α, β, γ, γ' qui figurent dans la formule.

CHAPITRE IV.

CONCLUSION.
APERÇU SUR LA VISCOSITÉ DES FLUIDES EN GÉNÉRAL.

VISCOSITÉ DES FLUIDES.

264. Les faits. — Résumons les résultats de l'expérience :

A température croissante, la viscosité des liquides décroît rapidement, jusqu'à des valeurs au moins dix fois plus petites au voisinage du point critique, et recommence à croître à l'état gazeux. A ce dernier état, sous faible densité, la température seule influe, mais non la densité; à l'état liquide, au moins au voisinage de la température critique, l'influence de la densité est prédominante ; beaucoup au-dessous du point critique, les expériences sur l'influence de la pression sont encore trop peu nombreuses pour décider si les deux variables indépendantes température et densité ont un rôle comparable ou si la température n'influe que par les changements de densité qui l'accompagnent.

Laissons de côté les propriétés singulières de l'eau (Livre II, Chap. III, n°s 155 à 157) qui peuvent tenir à sa constitution associée. Pour le gaz carbonique, l'éther, la benzine, la viscosité croît avec la densité d'autant plus vite qu'on est plus au-dessous du point critique.

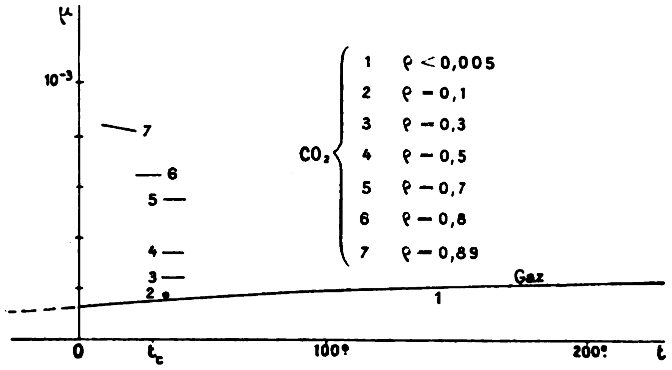
Pour le gaz carbonique, le Tableau suivant rappelle les principaux résultats de Warburg (n° 166) :

t.	ρ.	p(atm.).	μ.
5°.....	0,92	sat.	0,000925
10.....	0,89	»	852
25.....	0,89	105	800
23.....	0,80	sat.	660
32,6...	0,80	107	678
32,6...	0,31	74,6	241
32,6...	0,10	43	180
0.....	0,002	1	143
100.....	»	1	0,000184

($t_c = 31°$, $p_c = 73^{atm}$).

Ainsi, en prenant comme variables le volume et la température, la surface qui représente la viscosité serait aux faibles densités et à toute température un cylindre à génératrices parallèles à l'axe des volumes; aux fortes densités et aux températures voisines de la température critique, sensiblement un cylindre parallèle à l'axe des

Fig. 91.



températures. C'est ce dont la figure 91 donne une idée par le tracé des courbes à basse température sous forte densité.

265. Gaz ordinaires. — Reprenons la discussion d'après la théorie. La formule de Sutherland

$$\mu = \mu_0 \frac{T_0 + C}{T_0^{\frac{3}{2}}} \frac{T^{\frac{3}{2}}}{T + C}$$

paraît convenir aux gaz dans un domaine extrêmement étendu.

Aux températures très élevées, elle a l'allure parabolique $T^{\frac{1}{2}}$. Aux très basses températures, la concavité est opposée; l'allure est celle de $T^{\frac{3}{2}}$; il y a donc un point d'inflexion, qu'on trouve facilement, pour

$$T_i = C(-3 + 2\sqrt{3}) = 0,464\,C$$

et

$$\mu_i = \mu_0 \frac{T_0 + C}{T_0^{\frac{3}{2}}} 0,215\sqrt{C},$$

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial T} = \frac{0,55}{\sqrt{C}}.$$

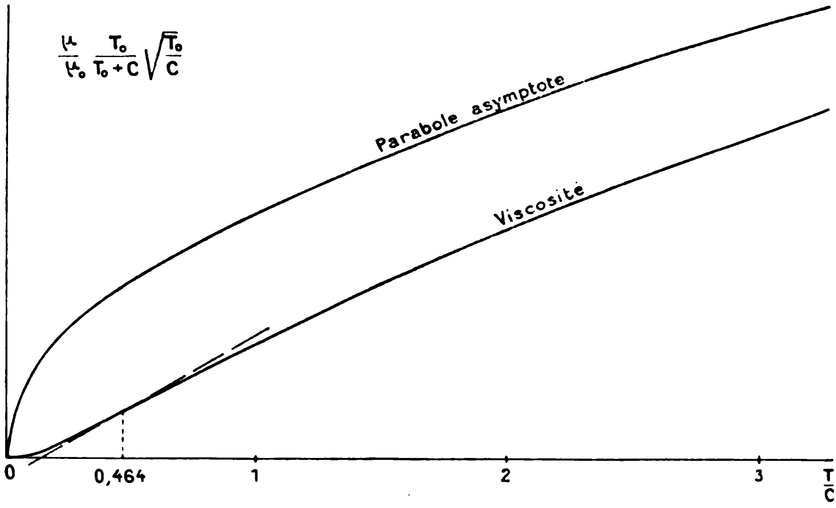
Avec les valeurs de C citées plus haut (n° 252), on trouve

	$T_{crit.}$	C.	T_i.
Hydrogène	39	72	33°,5
Azote	127	110,6	51
Air	»	114	53
Oxygène	155	127	59
Oxyde de carbone	133	100	46
Gaz carbonique	304	240	111
Protoxyde d'azote	310	260	120
Éthylène	284	226	105

Ce point d'inflexion est, pour les trois derniers gaz, au voisinage de la température d'ébullition, beaucoup au-dessous du point critique, vers $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4}T_c$, sans qu'il soit possible de préciser la relation. Il y a peu d'espoir de l'atteindre.

Cette loi peut être mise sous une forme qui montre la correspondance des états au point de vue de la viscosité, en prenant pour variable indépendante le rapport $\frac{T}{C}$ et pour fonction $\frac{\mu}{\mu_0}\frac{T_0}{T_0+C}\sqrt{\frac{T_0}{C}}$. Avec ces variables, la courbe représentative est unique pour tous les gaz; c'est celle qui est tracée dans la figure 92. La courbe part de

Fig. 92.



l'origine tangentiellement, se relève rapidement, change de courbure pour $T = 0,464\,C$ et se rapproche lentement de la parabole asymp-

tote en restant au-dessous. C'est seulement fort loin de cette inflexion, au delà de $T = 2C$ environ, qu'est la partie utile de la courbe pour les gaz.

266. Fluides quelconques [1]. — Mais dans la théorie de la viscosité des liquides on a reconnu la mise en œuvre de deux mécanismes distincts, dont un seul a été pris en considération dans le cas des gaz. La formule générale de la viscosité des fluides, en tenant compte des deux mécanismes, est donc, à mon avis,

$$\text{(I)} \qquad \mu = \frac{1}{3}\rho\Omega\left[\alpha(\lambda + 2R) + \frac{\beta}{2}\frac{4R^2}{\lambda}\right]$$

avec

$$\text{(II)} \qquad \lambda = \frac{\Lambda}{\rho}\frac{T}{T + C}$$

lorsque la densité est faible, et, au contraire,

$$\text{(III)} \qquad \lambda = D - 2R = b\rho^{-\frac{1}{3}} - 2R \qquad \left[b = 1.19.10^{-8}M^{\frac{1}{3}} \quad (\text{n}^\circ\ 263)\right]$$

quand la densité est très grande.

La formule modifiée pour les gaz est alors

$$\text{(IV)} \qquad \mu = \mu_0\sqrt{\frac{T_0}{T}}\,\frac{T_0 + C}{T + C}\,\frac{\alpha[T^2 + a\rho T(T + C)] + \frac{1}{2}\beta a^2\rho^2(T + C)^2}{\alpha[T_0^2 + a\rho_0 T_0(T_0 + C)] + \frac{1}{2}\beta a^2\rho_0^2(T_0 + C)^2}$$

en posant

$$a = \frac{2R}{\Lambda}.$$

267. Gaz denses. — Sous la pression atmosphérique et à 273°, le produit $a\rho$ est de l'ordre de $\frac{1}{200}$ pour la plupart des gaz; il suffirait donc, d'après cette formule, d'opérer sous des pressions de 50^{atm} à 100^{atm} pour mettre en évidence une influence de la densité. C'est ce qui est arrivé dans les expériences de Warburg au voisinage du point critique; mais il y a lieu de croire que c'est là un effet, non de la température critique, mais de la grande densité. Aux grandes densités, sous 1000^{atm}, mais à l'état gazeux, sans dépasser le point critique de plus d'une centaine de degrés, le terme le plus important serait le dernier et, si le chemin moyen était donné par la loi de Sutherland, la viscosité se rapprocherait de la loi

$$\mu = \frac{\mu_0}{\rho_0^2}\,\frac{\sqrt{T_0}}{T_0 + C} \times \rho^2\frac{T + C}{\sqrt{T}}$$

(1) BRILLOUIN, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, mai 1907.

ou

$$\mu = \frac{\mu_0 T_0^{\frac{5}{2}}}{p_0^2 (T_0 + C)} \times p^2 \frac{T + C}{T^{\frac{5}{2}}}.$$

Sous pression constante, elle décroîtrait extrêmement vite aux températures croissantes.

Il y aurait donc grand intérêt à reprendre des expériences de viscosité sur un gaz comme l'oxygène ou l'azote, sous 500^{atm} à 1000^{atm} par exemple, entre 0° et 200°.

Sans autre calcul, le résultat précédent montre que, sous pression constante, le point d'inflexion de la courbe de viscosité en fonction de la température correspond à une température d'autant plus élevée que la pression est plus forte. Sous densité constante considérable, on aurait

$$\frac{\partial \mu}{\partial T} = \mu \frac{T - C}{2T(T + C)},$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} = \frac{\partial \mu}{\partial T} \frac{3C - T}{2T(T - C)}.$$

Il y aurait un minimum pour $T = C$ et un point d'inflexion pour $T = 3C$, ce qui précise la signification physique de la température C; en particulier, le point d'inflexion, sous forte densité constante ρ, paraît devoir être peu éloigné du point critique. L'équation

$$\mu = \left(\mu_0 \frac{T_0 + C}{T_0^{\frac{3}{2}}}\right) \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \left(\frac{T_0}{T_0 + C}\right)^2 \frac{T + C}{\sqrt{T}}$$

montre que, aux grandes densités, le paramètre de la parabole asymptote croît comme

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \left(\frac{T_0}{T_0 + C}\right)^2.$$

On a, en outre,

$$\mu_{\text{min.}} = \left(\mu_0 \frac{T_0 + C}{T_0^{\frac{3}{2}}}\right) \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \left(\frac{T_0}{T_0 + C}\right)^2 \cdot 2\sqrt{C},$$

$$\mu_{\text{infl.}} = \left(\mu_0 \frac{T_0 + C}{T_0^{\frac{2}{3}}}\right) \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \left(\frac{T_0}{T_0 + C}\right)^2 \cdot 2{,}31\sqrt{C}.$$

Ce minimum doit donc être très plat. Dans une étendue considérable de température, au-dessous du point critique, la viscosité à l'état gazeux dense doit peu varier avec la température sous volume constant.

268. Chemin moyen sous diverses densités. Gaz carbonique. — Il est intéressant de suivre les variations du chemin moyen en fonction de la densité sur un exemple numérique, celui du gaz carbonique pour lequel on a

$$2R = 2{,}6.10^{-8}, \qquad M = 44,$$

ce qui donne d'après une formule du Chapitre précédent

$$D = 1{,}19.10^{-8}\left(\frac{44}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} = 4{,}2.10^{-8}\rho^{-\frac{1}{3}},$$

d'où aux grandes densités

$$\lambda = D - 2R = \left(\frac{4{,}2}{\rho^{\frac{1}{3}}} - 2{,}6\right)10^{-8}.$$

Aux faibles densités la formule de Sutherland donne

$$\lambda = 7.10^{-6}\,\frac{0{,}002}{\rho}\,\frac{T}{273}\,\frac{273+240}{T+240} = \frac{2{,}6.10^{-8}}{\rho}\,\frac{T}{T+240}.$$

Chemin moyen théorique sous diverses densités (CO_2).

	Formule de Sutherland.		
ρ.	T = 273°.	T = 273° + 500°.	Liquide.
0,002....	700.10⁻⁸	980.10⁻⁸	»
0,010....	140	196	»
0,050....	70	98	»
0,100....	14	19	»
0,500....	7	10	»
0,800....	1,75	2,5	1,93
0,900....	1,56	2,2	1,75
1,000....	1,4	2,0	1,6

Cette comparaison numérique est extrêmement instructive; elle montre combien la formule de Sutherland suit de près les propriétés du corps même aux grandes densités, puisque les chemins moyens auxquels elle conduit sont, suivant la température, inférieurs ou supérieurs à ceux auxquels conduit une théorie sommaire du chemin moyen dans les liquides; une théorie plus complète, dans laquelle on tiendrait compte des attractions moléculaires, mettrait en évidence dans les liquides mêmes une influence de la température qui rendrait probablement le parallélisme des deux formules plus complet encore.

Il est donc vraisemblable que l'ensemble des formules I et III ou, ce qui revient au même, la formule IV à trois constantes seulement

μ_0, C, a, convient dans une étendue de densités et de températures qui comprend tout l'état fluide.

269. Détermination de la viscosité du liquide d'après celle du gaz carbonique. — Adoptons pour l'anhydride carbonique les constantes fournies par les mesures de Breitenbach ([1]), sous la pression de 1^{atm}, entre des températures — 21° et 300° environ, c'est-à-dire sous une densité peu éloignée de 0,002 :

$$C = 240, \qquad a = 1, \qquad \mu_0 = 139.10^{-6}, \qquad \alpha = 1.$$

La formule IV est alors

$$\mu = \frac{15,3.10^{-6}}{\sqrt{T}} \frac{[T^2(1+\rho+\frac{1}{2}\beta\rho^2)+240T\rho(1+\beta\rho)+\frac{1}{2}\beta(240\rho)^2]}{T+240}.$$

Nous savons qu'elle représente bien l'état gazeux sous faible densité.

Comparons-la aux expériences de Warburg ([2]) au voisinage de l'état critique, ce qui constitue une formidable extrapolation :

$T = 273° + 32°.$

ρ.	μ calculé $\beta = 2$.	μ observé.	μ calculé $\beta = 1$.
1.......	0,000917	»	0,000680
0,9.....	772	»	579
0,8.....	666	0,000678	513
0,7.....	567	550	451
0,6.....	480	440	396
0,5.....	400	345	341
0,4.....	330	295	293
0,3.....	270	230	250
0,2.....	221	200	212
0,1.....	0,000180	0,000180	0,000178

L'accord est tout à fait extraordinaire, pour les fortes densités avec $\beta = 2$, et pour les faibles densités avec $\beta = 1$, bien que la courbure des valeurs expérimentales soit notablement plus accentuée que celle des valeurs calculées, sous cette température de 32°.

C'est aux densités moyennes 0,3 à 0,4, c'est-à-dire tout près de l'état critique ($t_c = 31°,3$, $\rho_{cr} = 0,46$), que l'écart entre le résultat

(1) Livre III, Chap. IV, n° 225, p. 62.
(2) Livre II, Chap. III, p. 194.

calculé ($\beta = 2$) et le résultat observé est le plus grand et atteint $\frac{1}{8}$. Cet écart est évidemment supérieur aux erreurs d'expérience possibles, malgré l'extrême difficulté de celles-ci, car les mesures à 32° et à 42° se suivent de très près; mais le défaut n'est peut-être pas plus grave que celui de la formule de Van der Vaals dans la même région.

La formule IV traduit bien le mécanisme de la viscosité à l'état fluide; elle n'exigera qu'une retouche pour tenir compte de la courbure des trajectoires et surtout de la variation de la vitesse, sous forte densité.

270. Autre détermination de la viscosité du liquide.— Aux grandes densités, la formule générale (I) peut être employée avec la formule (III) qui définit le chemin moyen à l'état liquide au moyen de constantes universelles, de la densité du liquide et d'une seule donnée moléculaire spécifique, le diamètre d'une molécule 2R. Empruntons cette dernière donnée seule aux expériences faites à l'état gazeux, nous avons pour l'anhydride carbonique à 32° C. :

$$M = 44, \quad \Omega = 1,39.10^{4}, \quad b = 4,21.10^{-8}, \quad \alpha = 1,$$
$$2R = 2,60.10^{-8},$$

ce qui, porté dans les formules (I) et (III), donne

$$\mu = 1,39.10^{-4}\left(4,21\rho^{\frac{2}{3}} + \frac{\beta}{2}\,\frac{6,76\rho}{4,21\rho^{-\frac{1}{3}} - 2,60}\right);$$

le premier terme que nous désignerons par μ_1 provient de l'échange des molécules et le second μ_2 du transport de centre à centre au moment du choc.

Le Tableau suivant contient le résultat du calcul, avec $\beta = 1$ et $\beta = 2$.

Viscosité du liquide carbonique calculée par les formules (I) *et* (III).

ρ.	$10^4\mu_1$.	$10^4\mu_2$.	$10^4\mu$. ($\beta = 1$).	$10^4\mu$. ($\beta = 2$).	$10^4\mu$. (Warburg).	$10^4\mu'$.
0,9......	5,45	2,40	7,85	10,25	8,5	8,15
0,8......	5,05	1,95	7,00	8,95	6,78	6,76
0,7......	4,62	1,53	6,15	7,68	5,50	5,50
0,6......	4,16	1,18	5,34	6,53	4,40	4,40
0,5......	3,69	0,87	4,56	5,44	3,45	3,40
0,4......	3,20	0,60	3,80	4,41	2,95	2,53
0,3......	2,62	0,38	3,00	3,39	2,30	1,76
0,2......	2,00	0,20	2,20	2,40	2,00	1,08
0,1......	1,25	0,07	1,32	1,39	1,80	»

Les trois dernières lignes ont été écrites à titre de curiosité; mais la formule ne leur est pas applicable, car sous ces densités, inférieures à la densité critique, l'agitation moléculaire est trop grande pour que le chemin moyen soit correctement évalué par la formule (III).

Les valeurs calculées sont de même ordre que les valeurs observées, mais notablement supérieures. Comme le calcul a été fait à l'aide de la formule (I) n° 266, voyons s'il y a moyen d'améliorer la concordance en rétablissant les coefficients arbitraires α, β, universels, dont nous avions reconnu la nécessité théorique au n° 258. On trouve facilement que les observations aux grandes densités sont bien représentées en prenant

$$\mu' = 0,26\,\mu_1 + 2,8\,\mu_2,$$

c'est-à-dire en augmentant l'importance du transport par choc, et réduisant celle des échanges de molécules. C'est ce que montre la dernière colonne du Tableau précédent.

Tout intéressants que soient ces résultats, ils sont beaucoup moins satisfaisants que ceux obtenus avec la formule (IV), qui utilise non seulement le diamètre moléculaire $2R$, mais aussi la constante C de Sutherland déterminée par l'état gazeux. Le chemin moyen au voisinage immédiat de la température critique est médiocrement déterminé par la formule (III); car celle-ci a été obtenue par un raisonnement (n° 257) qui néglige trop l'agitation des molécules; la théorie de l'état liquide est moins avancée que celle de l'ensemble de l'état fluide.

Des formules du type (I), (III) représentent au cinquantième et même au centième près les résultats de Thorpe et Rodger, mais en employant des indéterminées α, β, qui ne sont pas des constantes universelles. Je crois inutile d'en donner ici des exemples, espérant obtenir mieux d'ici peu.

271. Conclusion. — Des considérations théoriques analogues, mais un peu plus complexes, seraient applicables à la recherche de l'équation d'état et à celle des tensions superficielles. Mais, jusqu'à présent, c'est l'étude théorique et expérimentale de la viscosité et de la diffusion des fluides dans un grand intervalle de température et de densités qui promet les résultats les plus faciles à interpréter (1).

---

(1) J'avais entrepris, avec l'aide de M. Bénard, des expériences sur ces divers sujets, en 1898 et 1899, alors que j'étais suppléant de M. Mascart pour le cours de

J'espère avoir montré, par les aperçus qui terminent ce Livre, que la fécondité de la théorie dynamique des fluides est loin d'être épuisée; elle seule permet de relier les propriétés des liquides à celles des gaz; elle seule fournit le moyen d'aborder directement la recherche de lois d'action moléculaires. Elle ne fait nullement double emploi avec les théories électroniques modernes, auxquelles elle prête son appui et en partie ses méthodes et qui, laissant de côté les actions de molécule à molécule, se montrent surtout puissantes pour l'étude de la construction interne de la molécule et plus encore de l'atome lui-même. Il reste donc très désirable que quelques physiciens habiles poursuivent l'étude de la viscosité et de la diffusion des fluides, tant au point de vue théorique qu'au point de vue expérimental.

Physique expérimentale au Collège de France. J'ai donné, en 1900, un aperçu des expériences préliminaires sur la diffusion (*Congrès de Physique*, 1900, Paris, Gauthier-Villars, t. I, p. 512), que j'espère pouvoir reprendre prochainement, après en avoir été détourné pendant plusieurs années par l'étude et la construction d'appareils géodésiques et surtout par le changement de nature de mon enseignement au Collège de France, consacré pendant plusieurs années aux théories électriques modernes. C'est surtout à ces études particulières de Physique moléculaire que j'adapterai d'abord les ressources expérimentales que je m'efforce d'obtenir au Collège de France.

ERRATA DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Nos.	Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
72	83	19	$(2\cos^2\zeta - 1)$	$3(\cos^2\zeta - 1)$
72	83	20	$(4 - 4\beta R + \beta^2 R^2)$	$(9 - 9\beta R + \beta^2 R^2)$
73	83	25	$\left(4 - \frac{\rho\theta_1 R^2}{\mu}\right)$	$\left(9 - \frac{\rho\theta_1 R^2}{\mu}\right)$
73	84	3, 4, 11, 12, 20	$(4 + 4R\ldots)$	$(9 + 9R\ldots)$
73	84	21	$4 + 4R\sqrt{\ldots} - \varepsilon(2R\sqrt{\ldots})$	$9 + 9R\sqrt{\ldots} - \varepsilon\left(\frac{9}{2}R\sqrt{\ldots}\right)$
73	84	22	$4R\sqrt{\ldots} + \ldots + \varepsilon 2R\sqrt{\ldots}$	$9R\sqrt{\ldots} + \ldots + \varepsilon\frac{9}{2}R\sqrt{\ldots}$
73	85	23	$(4 - 4\beta R + \beta^2 R^2)$	$(9 - 9\beta R + \beta^2 R^2)$

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE III. — LES GAZ.

CHAPITRE I.

PREMIÈRES RECHERCHES SUR LA VISCOSITÉ DES GAZ, AU MOYEN DU PENDULE ET DES DISQUES OSCILLANTS.

CHAPITRE II.

MAXWELL. — KUNDT ET WARBURG.

CHAPITRE III.

ÉCOULEMENT PAR UN TUBE ÉTROIT.

CHAPITRE IV.

TUBES. — HAUTES TEMPÉRATURES.

CHAPITRE V.

EXPÉRIENCES DIVERSES.

LIVRE IV. — Théories moléculaires. Conclusion.

CHAPITRE I.

PREMIERS ESSAIS DE THEORIE.

CHAPITRE II.

GAZ. — THEORIES DYNAMIQUES.

CHAPITRE III.

LIQUIDES. — ESSAI DE THEORIE CINETIQUE.

CHAPITRE IV.

CONCLUSION. — APERÇU SUR LA VISCOSITÉ DES FLUIDES EN GÉNÉRAL.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA DEUXIÈME PARTIE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,

28841 Quai des Grands-Augustins, 55.